

# 反応拡散近似とその周辺

飯田雅人      二宮広和

## 1 反応拡散近似とは

いくつかの化学物質が拡散しながら反応する場合，その密度分布を表す方程式として偏微分方程式

$$(1) \quad \mathbf{u}_t = \mathbf{D}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{F}(\mathbf{u})$$

がよく用いられる．ここで， $m, N$  を，未知関数の個数，空間の次元とし， $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$  は  $m$  成分のベクトル値関数， $\mathbf{D}$  は非負の成分をもつ対角行列， $\Delta$  は  $x \in \mathbb{R}^N$  に関する Laplace 作用素， $\mathbf{F}$  は  $\mathbb{R}^m$  から  $\mathbb{R}^m$  への滑らかな関数とする．この方程式は，放物型偏微分方程式になっており，適切な境界条件と初期条件を与えれば，解の時間に関する局所的な存在は，古典的な結果から従う．境界条件はいろいろ考えられるが，本稿では，特に断らない限り， $x$  の変域  $\Omega$  を境界が滑らかな  $\mathbb{R}^N$  の有界領域とし，斉次 Neumann 境界条件（反射壁条件）を課すことにする．この方程式 (1) は，反応項と拡散項のみからなるため**反応拡散系**とも呼ばれる．非平衡化学反応をはじめとして，物理学，生態学や生理学などでも用いられている．しかし，この方程式は，あまり数学的に美しい形式とは言えない．なぜなら， $\mathbf{D}$  がスカラー行列のときは， $\mathbf{u}$  の線形変換で (1) の形は不変であるが， $\mathbf{D}$  がスカラー行列でない対角行列のときは，線形変換によってこの形を保たないからである．一方，このことは，我々の直感と違う現象を産み出し，後述する Turing の拡散誘導不安定性の一因であり，本稿テーマの**反応拡散近似**が考え出されたきっかけでもあった．

簡単な例を考えてみよう．小さなパラメータ  $\varepsilon (> 0)$  を含む反応拡散系

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} u_2 - u_1 \\ u_1 - u_2 \end{pmatrix}$$

において、 $\varepsilon$  を 0 に近づけるととき解はどのように振る舞うだろうか？ 解を  $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$  と書くことにし、(2) において形式的に  $\varepsilon \rightarrow +0$  とすれば、 $u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon \rightarrow 0$  が期待できるから、解の形式的な極限を

$$u_j^* := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_j^\varepsilon \quad (j = 1, 2)$$

とおけば、 $u_1^* = u_2^*$  である。また、 $w^\varepsilon = u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon$ ,  $w^* = u_1^* + u_2^*$  と定義し、(2) の第 1 行と第 2 行を足し合わせると

$$w_t^\varepsilon = 2\Delta u_2^\varepsilon$$

なので、 $w^* = u_1^* + u_2^* = 2u_2^*$  より、

$$w_t^* = \Delta w^*$$

となることが予想される。従って、 $u_1^\varepsilon$  自身はランダムに動いていないにもかかわらず、 $u_2$  に変身することにより、 $u_1$  の移動が可能になっている。別の言い方をすると、 $u_2$  が運び屋になっているのである。

一般に、反応項の一部に小さな正のパラメータ  $\varepsilon$  を含む反応拡散系

$$(3) \quad \mathbf{u}_t = D\Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}(\mathbf{u}) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{G}(\mathbf{u})$$

を考え、 $\varepsilon$  を 0 に近づけるととき解がどのように振る舞うかを調べていきたい。ただし、 $\mathbf{G}$  も、 $\mathbb{R}^m$  から  $\mathbb{R}^m$  への滑らかな関数としておく。上の例や図 6, 7, 8 (第 3.4 節参照) に見られるように、十分小さな  $\varepsilon$  に対する (3) の解は、(3) そのものからは想像し難い様相を示すことがしばしばある。反応拡散系 (3) の形式的な極限をとってみよう：

$$\varepsilon \mathbf{u}_t^\varepsilon = \varepsilon D\Delta \mathbf{u}^\varepsilon + \varepsilon \mathbf{F}(\mathbf{u}^\varepsilon) + \mathbf{G}(\mathbf{u}^\varepsilon)$$

と変形して、 $\varepsilon \rightarrow +0$  とすることにより、形式的には

$$(4) \quad \mathbf{0} = \mathbf{G}(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u}^\varepsilon)$$

が得られるから、(3) の解  $\mathbf{u}^\varepsilon$  は  $\mathbf{G}$  の零点集合

$$\mathcal{E} := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{G}(\mathbf{u}) = 0\}$$

に収束することが期待できる。この集合を**反応平衡集合**と呼ぶことにする ([17, 47])。

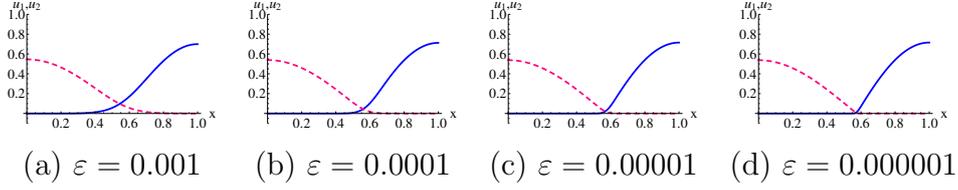


図 1:  $N = 1, d_1 = 1, d_2 = 2, f = g = 0$  のとき,  $t = 0.05$  での  $(P^\varepsilon)$  の  $\varepsilon$  に伴う解の挙動. 実線は  $u_1$  のグラフで, 破線は  $u_2$  のグラフである.

例えば, 第 2.1 節で取り上げるような Lotka-Volterra 型拡散競争系

$$(5) \quad \begin{cases} u_{1t} = d_1 \Delta u_1 + (r_1 - a_1 u_1 - b_1 u_2) u_1, & x \in \Omega, t > 0, \\ u_{2t} = d_2 \Delta u_2 + (r_2 - a_2 u_2 - b_2 u_1) u_2, & x \in \Omega, t > 0 \end{cases}$$

において, 特に  $b_j = s_j/\varepsilon$  と設定した

$$(P^\varepsilon) \quad \begin{cases} u_{1t} = d_1 \Delta u_1 + f(u_1) - \frac{s_1}{\varepsilon} u_1 u_2, & x \in \Omega, t > 0, \\ u_{2t} = d_2 \Delta u_2 + g(u_2) - \frac{s_2}{\varepsilon} u_1 u_2, & x \in \Omega, t > 0 \end{cases}$$

に対し, パラメータ  $\varepsilon$  の小ささに伴う解の形状の変化を例示すると, 図 1 のようになる:  $\varepsilon$  を小さくするにつれて,  $u_1$  と  $u_2$  のサポートが分離していく様子が見てとれる. ここで,  $f, g$  は, 通常,  $f(u_1) = (r_1 - a_1 u_1) u_1$ ,  $g(u_2) = (r_2 - a_2 u_2) u_2$  のような関数を考えるが, 簡単のため  $f = g = 0$  としてもよい. ただし,  $s_1, s_2, d_1, d_2$  は正の定数,  $r_1, r_2, a_1, a_2$  は非負の定数とする. 反応拡散系 (2), (5) など本稿で取り扱う具体例は, 反射壁境界条件のもとで,  $t = 0$  で各成分が非負なら,  $t > 0$  でも各成分が非負となる性質をもっている. 以降, 特に断らない限り解は非負であると仮定する. このとき,  $(P^\varepsilon)$  の反応平衡集合  $\mathcal{E}$  は 2 線分からなる. つまり,

$$\{(u_1, u_2) \mid u_1 \geq 0, u_2 = 0\} \cup \{(u_1, u_2) \mid u_1 = 0, u_2 \geq 0\}$$

である. この  $\mathcal{E}$  は原点で滑らかでないので, 密度  $u_1, u_2$  のフラックスが極限では不連続性をもつ. その結果,  $\varepsilon \rightarrow +0$  のとき自由境界が現れ, 極限問題は 2 相 Stefan 問題に帰着されることを, 第 2.1 節で説明する. これは, 2 相 Stefan 問題は, 拡散競争系  $(P^\varepsilon)$  で近似されることを意味している.

このように反応拡散系でない偏微分方程式系を反応拡散系で近似することを **反応拡散近似** という. 反応拡散近似は, 特異摂動問題の一種であ

るが、反応拡散系で表される方程式の集合の境界を求めることに対応している。なお、(4)は必ずしも成り立たないことに注意しておく。例えば、

$$u_t = \Delta u + \frac{1}{\varepsilon}(u - u^3)$$

では、 $\varepsilon = \{-1, 0, 1\}$ であり、 $\varepsilon$ が十分小さいと、**遷移層**という急激に $u^\varepsilon$ の値が変化する部分が現れて、 $u^\varepsilon(\cdot, t)$ は $-1$ と $1$ をつなぐ階段状の関数に近くなり、遷移層上では、 $\varepsilon$ に値を取らなくなる。その遷移層の構造や運動については、西浦 [50] を参照されたい。

次節以降では、集合  $\varepsilon$  が常微分方程式系

$$(6) \quad \mathbf{u}_t = \mathbf{G}(\mathbf{u})$$

の(中立)安定平衡解のみからなる場合を考え、反応拡散系(3)とその極限の関係を見ていこう。一般的な理論はまだ構築されていないので、例を挙げながら、反応拡散系の極限方程式と反応平衡集合の関係を説明していく。

## 2 反応拡散近似の諸相

### 2.1 競争系と Stefan 問題

前節で取り上げた Lotka-Volterra 型拡散競争系 ( $P^\varepsilon$ ) を詳しく説明しよう。 $(P^\varepsilon)$  では  $u_1, u_2$  は競争関係にある 2 つの生物種の個体群密度に対応し、 $a_1$  と  $a_2$  は種内競争係数に対応し、 $s_1/\varepsilon$  と  $s_2/\varepsilon$  は種間競争係数に対応するので、 $\varepsilon \rightarrow +0$  は種間競争係数が非常に大きい場合を考えることに相当する。2 種の競争が激しいので排他原理が働き、同じ場所で共存するのは難しくなる。つまり、領域が 2 つの生息域に分離される (図 1 参照)。では、その生息域は、どのように時間発展するのであろうか？

$(P^\varepsilon)$  の境界条件、初期条件として、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu} &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u_1(x, 0) &= u_{01}(x), \quad u_2(x, 0) = u_{02}(x), \quad x \in \Omega \end{aligned}$$

の場合を考える。ここで、 $\nu$  は  $\partial\Omega$  の外向き単位法線ベクトルである。初期関数  $(u_{01}, u_{02})$  は、

$$\begin{aligned} u_{01}, u_{02} &\in C(\bar{\Omega}), \quad u_{01} \geq 0, \quad u_{02} \geq 0, \\ \{x \in \Omega \mid u_{01} > 0\} \cap \{x \in \Omega \mid u_{02} > 0\} &= \emptyset \end{aligned}$$

をみだし,  $u_{01} = u_{02} = 0$  となる点  $x \in \Omega$  の集合は  $N - 1$  次元の超曲面をなしているとする. これらの初期関数についての条件は, 実際にはもう少し弱くとることができるが, 簡単のため, 本稿では上のように仮定しておく.

**定理 1 (Dancer · Hilhorst · 三村 · Peletier [9, Lemmas 3.1 · 3.4])**  
 $T > 0$  を任意の正数として  $Q_T := \Omega \times (0, T)$  と定義する.  $(P^\varepsilon)$  の解  $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$  は,  $\varepsilon \rightarrow +0$  のとき,

$$u_1^\varepsilon \longrightarrow u_1 := s_1 w^+, \quad u_2^\varepsilon \longrightarrow u_2 := s_2 w^-$$

と  $L^2(Q_T)$  強収束する. ここで,

$$r^+ := \max(r, 0), \quad r^- := -\min(r, 0)$$

と定義した. さらに,  $w$  は,

$$(7) \quad d(r) := d_1 r^+ - d_2 r^-, \quad h(r) = \frac{f(s_1 r^+)}{s_1} - \frac{g(s_2 r^-)}{s_2}$$

を用いて表される以下の問題  $(P)$  の弱解となっている.

$$(P) \quad \begin{cases} w_t = \Delta d(w) + h(w) & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial d(w)}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ w(\cdot, 0) = w_0 := \frac{u_{01}}{s_1} - \frac{u_{02}}{s_2} & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

この定理では, Neumann 境界条件を考えたが, その代わりに

$$u_1 = m_1^\varepsilon, \quad u_2 = m_2^\varepsilon, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0$$

と境界での分布を与える Dirichlet 境界条件の場合も, 本質的に同じように扱することができる (Crooks 他 [6] 参照).

反応拡散系  $(P^\varepsilon)$  は 2 成分  $u^\varepsilon, v^\varepsilon$  の系なのに, その極限は 1 成分  $w = u_1/s_1 - u_2/s_2$  の系  $(P)$  に縮約されている. しかしながら, この極限では, 各時刻  $t$  において, 集合  $\{x \in \Omega \mid w(x, t) = 0\}$  によって領域  $\Omega$  が  $u_1 > 0$  の領域と  $u_2 > 0$  の領域の 2 つに分離され, それぞれの領域も時間と共に変化するので,  $(P)$  の実態は自由境界問題である. 異なる 2 相における熱伝導方程式の一般系であり, Stefan 問題の一種と言える. ただし, 自由

境界での境界条件は，弱形式での表現に隠れているので，強形式に書き直して自由境界条件を陽に導き出そう。

極限問題  $(P)$  の弱解を  $w$  とし，任意の時刻  $t \in [0, T]$  に対して， $w(\cdot, t) > 0$  となる領域， $w(\cdot, t) < 0$  となる領域をそれぞれ  $\Omega_1(t), \Omega_2(t)$  と定義し，両者の界面

$$\Gamma(t) := \Omega \setminus (\Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)) = \{x \in \Omega \mid w(x, t) = 0\}$$

は超曲面になっているとする。詳細は述べない（例えば，Hilhorst 他 [15, Proof of Theorem 3.7] を参照）が，弱解や界面がある程度滑らかなとき，部分積分を行うことにより， $u_1, u_2$  は

$$(P^*) \quad \begin{cases} u_{1t} = d_1 \Delta u_1 + f(u_1) & \text{in } Q_1 := \bigcup_{t \in [0, T]} \Omega_1(t) \times \{t\}, \\ u_{2t} = d_2 \Delta u_2 + g(u_2) & \text{in } Q_2 := \bigcup_{t \in [0, T]} \Omega_2(t) \times \{t\}, \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{on } \Gamma := \bigcup_{t \in [0, T]} \Gamma(t) \times \{t\}, \\ \frac{d_1}{s_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} = -\frac{d_2}{s_2} \frac{\partial u_2}{\partial n} & \text{on } \Gamma, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times [0, T], \end{cases}$$

および初期条件

$$\frac{u_1(x, 0)}{s_1} = \left( \frac{u_{01}(x)}{s_1} - \frac{u_{02}(x)}{s_2} \right)^+, \quad \frac{u_2(x, 0)}{s_2} = \left( \frac{u_{01}(x)}{s_1} - \frac{u_{02}(x)}{s_2} \right)^-, \quad x \in \Omega$$

を満たしていることがわかる。ここで， $n$  は  $\Gamma(t)$  の  $\Omega_1(t)$  から  $\Omega_2(t)$  への単位法線ベクトルとする。 $u_1$  と  $u_2$  は界面  $\Gamma(t)$  で 0 となり連続であるが，導関数  $\partial u_1 / \partial n, \partial u_2 / \partial n$  は不連続になる。このような遷移層は**コーナー層**と呼ばれる。この極限問題は，2相 Stefan 問題と近いが，潜熱が 0 になっている。そこで，潜熱が正の 2相 Stefan 問題を反応拡散系により近似できないかという疑問が生じる。

この疑問に答えるために，まず潜熱付きの 2相 Stefan 問題を弱形式で表そう。 $d(r), h(r)$  は，(7) で与えられたものとし，系の状態を反映する関数

$$\varphi_\lambda(r) = (r - \lambda)^+ - r^-$$

を導入すると、潜熱  $\lambda$  をもつ 2 相 Stefan 問題は、

$$(Q) \quad \begin{cases} w_t = \Delta d(\varphi_\lambda(w)) + h(\varphi_\lambda(w)) & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial d(\varphi_\lambda(w))}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ w(\cdot, 0) = \frac{u_{01}}{s_1} - \frac{u_{02}}{s_2} + \lambda H\left(\frac{u_{01}}{s_1} - \frac{u_{02}}{s_2}\right) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

となる。ここで、 $H$  は Heaviside 関数とした。

先の疑問に戻る：  $u_1^\varepsilon$  の生息域を表現する新しい成分  $u_3^\varepsilon$  を導入し、3 成分の反応拡散系

$$(Q^\varepsilon) \quad \begin{cases} u_{1t} = d_1 \Delta u_1 + f(u_1) - \frac{s_1}{\varepsilon} u_1 u_2 - \frac{\lambda s_1}{\varepsilon} (1 - u_3) u_1, & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_{2t} = d_2 \Delta u_2 + g(u_2) - \frac{s_2}{\varepsilon} u_1 u_2 - \frac{\lambda s_2}{\varepsilon} u_3 u_2, & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_{3t} = \frac{1}{\varepsilon} (1 - u_3) u_1 - \frac{1}{\varepsilon} u_3 u_2, & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_1(x, 0) = u_{01}(x), u_2(x, 0) = u_{02}(x), u_3(x, 0) = H\left(\frac{u_{01}}{s_1} - \frac{u_{02}}{s_2}\right), & x \in \Omega \end{cases}$$

を考えよう。ここで  $\lambda$  は非負の定数で、潜熱に対応する係数であることがあとでわかる。初期条件には、 $0 \leq u_{03} \leq 1$  以外には定理 1 と同様の条件を課す ( $\{(u_1, u_2, u_3) \mid u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, 0 \leq u_3 \leq 1\}$  は  $(Q^\varepsilon)$  に対する (6) の正不変領域である) が、詳細は省略する。

**定理 2 (Hilhorst・飯田・三村・二宮 [15, Theorem 3.6][16, Theorem 1.1])**

$(Q^\varepsilon)$  の解  $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon)$  は、 $\varepsilon \rightarrow +0$  のとき、

$$u_1^\varepsilon \rightarrow u_1, \quad u_2^\varepsilon \rightarrow u_2, \quad u_3^\varepsilon \rightarrow u_3$$

と  $L^2(Q_T)$  強収束する。さらに、 $(Q)$  の弱解を  $w$  とすると、極限関数は、

$$u_1 = s_1(w - \lambda)^+, \quad u_2 = s_2 w^-, \quad u_3 = \frac{w - \varphi_\lambda(w)}{\lambda}$$

をみtas。

定理 1 は定理 2 の  $\lambda = 0$  とした場合になっている. また, 定理 2 においても, 3 成分  $u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon$  の系  $(Q^\varepsilon)$  が 1 成分  $w = u_1/s_1 - u_2/s_2 + \lambda u_3$  の系  $(Q)$  に縮約されてはいるが,  $(Q)$  の実態は, 定理 1 と同様に自由境界問題であり, 強形式にすることにより, 自由境界条件を陽に表すことができる. 弱解  $w$  に対して  $(P)$  と同様に  $\varphi_\lambda(w(\cdot, t)) > 0, \varphi_\lambda(w(\cdot, t)) < 0$  の領域をそれぞれ  $\Omega_1(t), \Omega_2(t)$  および

$$\Gamma(t) = \Omega \setminus (\Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)) = \{x \in \Omega \mid 0 \leq w(x, t) \leq \lambda\}$$

と定め, 初期値, 界面  $\Gamma(t)$  の滑らかさを仮定すると, 極限関数  $u_1$  と  $u_2$  は  $(P^*)$  の

$$\frac{d_1}{s_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} = -\frac{d_2}{s_2} \frac{\partial u_2}{\partial n} \quad \text{on } \Gamma$$

を

$$\lambda V_n = -\frac{d_1}{s_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{d_2}{s_2} \frac{\partial u_2}{\partial n} \quad \text{on } \Gamma$$

に差し替えた自由境界問題  $(Q^*)$  をみताす. ここで,  $V_n$  は,  $\Omega_1(t)$  から  $\Omega_2(t)$  向きの  $\Gamma(t)$  の法線速度である. さらに,

$$\Gamma(0) = \left\{ x \in \Omega \mid \frac{u_{01}(x)}{s_1} = \frac{u_{02}(x)}{s_2} \right\}$$

が成り立つ.  $u_3^\varepsilon$  は, 界面で不連続的な遷移層をもつが,  $u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon$  はコーナー層をもち, 界面でも連続である.  $u_3^\varepsilon$  が  $u_1^\varepsilon$  のなわばりを表す関数のようになっており,  $u_2^\varepsilon$  が  $u_1^\varepsilon$  のなわばりを侵食するときには  $u_3^\varepsilon$  と  $u_2^\varepsilon$  の間で,  $u_1^\varepsilon$  が  $u_2^\varepsilon$  のなわばりを侵食するときには  $1 - u_3^\varepsilon$  と  $u_1^\varepsilon$  との間で, それぞれ侵食コストとして“潜熱”が発生するようになっている.

定理 1,2 における収束の速さについては, 以下の結果を紹介しておく.

**定理 3 (村川 [45, 44])**  $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon)$  を  $(u_{01}, u_{02}, u_{03})$  を初期値とする  $(Q^\varepsilon)$  の解とし,  $w^\varepsilon := u_1^\varepsilon/s_1 - u_2^\varepsilon/s_2 + \lambda u_3^\varepsilon$  と定める.  $\lambda = 0$  のときは,  $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$  を  $(u_{01}, u_{02})$  を初期値とする  $(P^\varepsilon)$  の解とし,  $w^\varepsilon := u_1^\varepsilon/s_1 - u_2^\varepsilon/s_2$  と定める. このとき,  $\lambda$  に依存しない正の定数  $C$  が存在して,

$$\begin{aligned} & \|u_1^\varepsilon - u_1\|_{L^2(Q_T)} + \|u_2^\varepsilon - u_2\|_{L^2(Q_T)} + \|w^\varepsilon - w\|_{L^\infty(0,T;(H^1(\Omega))^*)} \\ & \leq C \left( \varepsilon^{1/4} + \|w^\varepsilon(\cdot, 0) - w(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ.

$(P^\varepsilon)$  の解の漸近形を調べた研究として, 飯田他 [22] を挙げておく.

## 2.2 交差拡散系

ランダムに運動する個体の密度分布は、拡散方程式で記述される。これに、競争効果を加えたのが、拡散競争系 (5) である。しかし、多くの生物においては、その個体はランダムに運動するとは限らない [28]。このとき、運動がランダムウォークではないので、(5) では、記述できない。運動の遷移確率を導入することにより、個体群密度  $n$  の方程式は、以下の3つに分類される:

- (i) 点 A から出発し点 B に到着する遷移確率と点 B から出発し点 A へ到着する遷移確率が等しい場合 (neutral transition):

$$n_t = \nabla(D(x)\nabla n)$$

- (ii) 遷移確率が出発点にのみ依存する場合 (repulsive transition):

$$n_t = \Delta(D(x)n)$$

- (iii) 遷移確率が到着点にのみ依存する場合 (attractive transition):

$$n_t = \nabla \left[ D(x)^2 \nabla \left( \frac{n}{D(x)} \right) \right].$$

詳細は、ここでは述べないので、大久保 [51, §5.4] を参照してほしい。遷移確率が、栄養や光・熱などの環境に依存することはよく見受けられる。その場合、出発点に依存すると考えるのが自然である。すると、(5) は、(ii) に基づいて変形される。その一つとして、(5) の  $d_1\Delta u_1$  や  $d_2\Delta u_2$  を  $\Delta[D_1(x)u_1]$  や  $\Delta[D_2(x)u_2]$  に置き換えることが考えられる。ここで、 $D_i(x)$  は、 $u_i$  の位置  $x$  における運動性 (motility) を表している ([55, §4.2.3] 参照)。  $D_i(x)$  がより大きいところでは、より多くの  $u_i$  が離れようとする傾向をもっている ([51])。重定・川崎・寺本 [52] は、これを種間の環境圧力と考え、 $D_i(x)$  を種の密度に依存した関数に置き換えることにより、競争種の空間的棲み分け現象を説明しようとし、

$$(8) \quad \begin{cases} w_{1t} = \Delta[(d_1 + \alpha w_2)w_1] + (r_1 - a_1 w_1 - b_1 w_2)w_1, & x \in \Omega, t > 0, \\ w_{2t} = \Delta[(d_2 + \beta w_1)w_2] + (r_2 - b_2 w_1 - a_2 w_2)w_2, & x \in \Omega, t > 0 \end{cases}$$

という方程式を導入した。ここで、 $u_i$  を  $w_i$  に改めている。この方程式は、競争2種の**交差拡散系**と呼ばれ、 $\alpha, \beta$  は、交差拡散圧力を表す非負の定

数で、交差拡散係数と呼ばれる。(8)は、準線形放物型偏微分方程式で、解の局所的存在は、Amann [1]による。解の大域的存在についても研究されているが、部分的にしか証明されていない。例えば、Lou 他 [34], Choi 他 [4]を参照されたい。空間的棲み分けの視点から(8)の定常問題を扱うには、主に分岐理論 ([38]), 特異摂動法 ([39, 26, 35]), 楕円型偏微分方程式論 ([33])の3つの方法が挙げられる。これらの結果から、(8)の定常解の構造は、パラメータに大きく依存しており、交差拡散効果を導入したことによって大変複雑になっていることがわかる。

反応拡散近似の視点は(8)の交差拡散効果に対する理解の深化にも役立つ。まず、遷移確率が出発点に依存する簡単な方程式に戻ろう。空間非一様な媒体を運動する生物種を考えよう。空間非一様性を $V(x)$  ( $0 \leq V(x) \leq 1$ )で与え、(ii)を用いると密度分布 $n$ は以下をみたすと考えられる:

$$(9) \quad \begin{cases} n_t = \Delta \left[ (d + \alpha V(x))n \right], & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial n}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ n(0, x) = n_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

ここで、 $d + \alpha V(x)$ は、 $x$ における運動性を表している ([51, 52] 参照)。

$$(d + \alpha V(x))n = d \cdot \{1 - V(x)\}n + (d + \alpha) \cdot V(x)n$$

なので、 $n$ を $n_1 := \{1 - V(x)\}n$ と $n_2 := V(x)n$ に分解すると、(9)は

$$(n_1 + n_2)_t = \Delta [dn_1 + (d + \alpha)n_2]$$

と表される。これは、(9)で決定される $n$ が、運動性 $d$ の $n_1$ と運動性 $d + \alpha$ の $n_2$ の和で表されることを意味している。つまり、 $n_1$ は、あまり運動しないインアクティブな状態の密度分布に対応し、 $n_2$ は、よく運動するアクティブな状態の密度分布に対応し、 $n$ の方程式はそれらの和で表されている。しかし、 $n_1$ の方程式と $n_2$ の方程式に分離することはできない。そこで、各個体が、インアクティブな状態とアクティブな状態の2状態を適度に切り替えていると考え、その2状態を切り替える確率が、環境要因 $V(x)$ に応じて変化すると仮定しよう。 $h_{2 \rightarrow 1}(x)$ をアクティブな状態からインアクティブな状態に、 $h_{1 \rightarrow 2}(x)$ をインアクティブな状態からアクティブな状態に切り替える確率とする。2状態間の切り替えは瞬時に行われると仮定し、比例係数として $1/\varepsilon$  ( $\varepsilon$ は小さな正の数)を導入すると、

$n_1$  と  $n_2$  に関する方程式は、以下のように記述される.

$$(10) \quad \begin{cases} n_{1t} = d\Delta n_1 + \frac{1}{\varepsilon}[h_{2 \rightarrow 1}(x)n_2 - h_{1 \rightarrow 2}(x)n_1], \\ n_{2t} = (d + \alpha)\Delta n_2 + \frac{1}{\varepsilon}[h_{1 \rightarrow 2}(x)n_1 - h_{2 \rightarrow 1}(x)n_2]. \end{cases}$$

次に,  $V(x)$  と  $h_{1 \rightarrow 2}, h_{2 \rightarrow 1}$  の関係を調べよう. (10) の 2 式を加え,  $n = n_1 + n_2$  を用いると

$$\begin{aligned} n_t &= \Delta [dn_1 + (d + \alpha)n_2], \\ n_{2t} &= (d + \alpha)\Delta n_2 + \frac{1}{\varepsilon} \left[ h_{1 \rightarrow 2}(x)n - \left( h_{1 \rightarrow 2}(x) + h_{2 \rightarrow 1}(x) \right) n_2 \right] \end{aligned}$$

となる. 第 2 式において,  $\varepsilon \rightarrow +0$  とすると, 形式的には

$$n_1 = \frac{h_{2 \rightarrow 1}(x)}{h_{1 \rightarrow 2}(x) + h_{2 \rightarrow 1}(x)} n, \quad n_2 = \frac{h_{1 \rightarrow 2}(x)}{h_{1 \rightarrow 2}(x) + h_{2 \rightarrow 1}(x)} n$$

が得られる. 従って,  $n$  がみたす極限方程式は

$$n_t = \Delta \left[ \left( d + \alpha \frac{h_{1 \rightarrow 2}(x)}{h_{1 \rightarrow 2}(x) + h_{2 \rightarrow 1}(x)} \right) n \right]$$

となり,  $V(x) = h_{1 \rightarrow 2}(x) / \{h_{1 \rightarrow 2}(x) + h_{2 \rightarrow 1}(x)\}$  となっていれば, 極限方程式は (9) と等しくなる. この形式的な計算は, 遷移確率が出発点に依存する運動がランダムウォークと状態切り替えによって表現できることを意味している.

この方法を (8) に適用しよう. 簡単のため,  $\beta = 0$  とする. 1 つの種  $w_1$  をインアクティブな状態とアクティブな状態の 2 状態に分割する. それぞれの密度分布を  $u_1(x, t), u_2(x, t)$  としよう. また,  $w_2$  を  $u_3(x, t)$  と書くことにすると,  $(w_1, w_2)$  を近似するような  $(u_1, u_2, u_3)$  に関する反応拡散系を構築できる. 解の有界性

$$(11) \quad 0 \leq w_1(x, t) \leq M_1, \quad 0 \leq w_2(x, t) \leq M_2, \quad x \in \Omega, \quad 0 \leq t \leq T$$

を仮定しよう. すると,

$$d_1 \leq d_1 + \alpha w_2(x, t) \leq d_1 + \alpha M_2$$

となる.  $n, n_1, n_2, d, d + \alpha, V$  を  $w_1, u_1, u_2, d_1, d_1 + \alpha M_2, w_2/M_2$  と読み替え, 2 状態の切り替え確率  $h_{1 \rightarrow 2}, h_{2 \rightarrow 1}$  を,  $u_3(x, t)$  の関数とみなす

ことにより, 反応拡散系は

$$(12) \quad \begin{cases} u_{1t} = d_1 \Delta u_1 + f_1(u_1, u_2, u_3) + \frac{1}{\varepsilon} [h_{2 \rightarrow 1}(u_3)u_2 - h_{1 \rightarrow 2}(u_3)u_1], \\ u_{2t} = (d_1 + \alpha M_2) \Delta u_2 + f_2(u_1, u_2, u_3) + \frac{1}{\varepsilon} [h_{1 \rightarrow 2}(u_3)u_1 - h_{2 \rightarrow 1}(u_3)u_2], \\ u_{3t} = d_2 \Delta u_3 + f_3(u_1, u_2, u_3), \quad x \in \Omega, t > 0 \end{cases}$$

となる. ただし,

$$\begin{cases} f_1(u_1, u_2, u_3) = [r_1 - a_1(u_1 + u_2) - b_1 u_3]u_1, \\ f_2(u_1, u_2, u_3) = [r_1 - a_1(u_1 + u_2) - b_1 u_3]u_2, \\ f_3(u_1, u_2, u_3) = [r_2 - b_2(u_1 + u_2) - a_2 u_3]u_3 \end{cases}$$

を用いた. 特に,

$$h_{2 \rightarrow 1}(s) = 1 - \frac{s}{M_2}, \quad h_{1 \rightarrow 2}(s) = \frac{s}{M_2}$$

ととることにより, (12) は, 交差拡散系

$$(13) \quad \begin{cases} w_{1t} = \Delta[(d_1 + \alpha w_2)w_1] + (r_1 - a_1 w_1 - b_1 w_2)w_1, & x \in \Omega, t > 0, \\ w_{2t} = d_2 \Delta w_2 + (r_2 - b_2 w_1 - a_2 w_2)w_2, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial \nu} = \frac{\partial w_2}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial \Omega, t > 0, \\ w_1(x, 0) = w_{01}(x), \quad w_2(x, 0) = w_{02}(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

の反応拡散近似となっていることが推察される.

次に,  $h_{1 \rightarrow 2}$  と  $h_{2 \rightarrow 1}$  の条件について考えよう. これらは,

$$(14) \quad h_{1 \rightarrow 2}(s) \equiv \left( h_{1 \rightarrow 2}(s) + h_{2 \rightarrow 1}(s) \right) \frac{s}{M_2}, \quad s \in [0, M_2]$$

をみたせばよいだけであるので, 比  $h_{2 \rightarrow 1}(s)/h_{1 \rightarrow 2}(s)$  は (14) より一意的に決まるが, 取り方には自由度がある. 例えば,

$$(i) \quad h_{1 \rightarrow 2}(u_3) := \frac{u_3}{M_2}, \quad h_{2 \rightarrow 1}(u_3) := 1 - \frac{u_3}{M_2}$$

$$(ii) \quad h_{1 \rightarrow 2}(u_3) := \frac{u_3}{M_2 + u_3}, \quad h_{2 \rightarrow 1}(u_3) := \frac{M_2 - u_3}{M_2 + u_3}$$

などが挙げられる. また,

$$(iii) \quad h_{1 \rightarrow 2}(u_3) := \frac{\varphi(u_3)}{1 + \varphi(u_3)}, \quad h_{2 \rightarrow 1}(u_3) := \frac{1}{1 + \varphi(u_3)}$$

$$(iv) \quad h_{1 \rightarrow 2}(u_3) := \varphi(u_3), \quad h_{2 \rightarrow 1}(u_3) := 1$$

の場合の極限方程式は、ともに

$$\begin{cases} w_{1t} = \Delta \left[ \left( d_1 + \frac{\alpha M_2 \varphi(w_2)}{1 + \varphi(w_2)} \right) w_1 \right] + (r_1 - a_1 w_1 - b_1 w_2) w_1, & x \in \Omega, t > 0, \\ w_{2t} = d_2 \Delta w_2 + (r_2 - b_2 w_1 - a_2 w_2) w_2, & x \in \Omega, t > 0 \end{cases}$$

であるが、特に  $\varphi(s) = s/M_2$  のとき得られた極限方程式は、 $w_2$  が小さいとき、(13)に近い方程式になっているので、(iii),(iv)とも交差拡散効果を産み出すしくみとみなしてよい。

以上は形式的な計算であるが、(12)の解が(13)の解の近似となっていることが解析的に示されている。

**定理 4 (飯田・二宮 [23, Theorem 1.1], 飯田・三村・二宮 [20, Theorem 1])**

$(w_1, w_2)$  を初期値  $(w_{01}, w_{02})$  に対する交差拡散系 (13) の解とし、 $\bar{\Omega} \times [0, T]$  上滑らかとする。また、(11)となる  $M_1 (\geq r_1/a_1)$ ,  $M_2 (\geq r_2/a_2)$  がとれると仮定する。 $h_{1 \rightarrow 2}$ ,  $h_{2 \rightarrow 1}$  は、 $s \in [0, M_2]$  に対し、(14) および

$$(15) \quad h_{1 \rightarrow 2}(s) \geq 0, \quad h_{2 \rightarrow 1}(s) \geq 0, \quad h_{1 \rightarrow 2}(s) + h_{2 \rightarrow 1}(s) > 0$$

をみたすとする。さらに、反応拡散系 (12) に対する初期値  $(u_{01}, u_{02}, u_{03})$  が  $\bar{\Omega}$  上

$$u_{01}(x) \equiv \left\{ 1 - \frac{w_{02}(x)}{M_2} \right\} w_{01}(x), \quad u_{02}(x) \equiv \frac{w_{02}(x)}{M_2} w_{01}(x), \quad u_{03}(x) \equiv w_{02}(x)$$

をみたすとする。(12)の解  $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon) = (u_1^\varepsilon(x, t), u_2^\varepsilon(x, t), u_3^\varepsilon(x, t))$  が  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  のとき  $\bar{\Omega} \times [0, T]$  上

$$(16) \quad |u_1^\varepsilon(x, t)| + |u_2^\varepsilon(x, t)| + |u_3^\varepsilon(x, t)| \leq M_0$$

をみたす正定数  $\varepsilon_0$ ,  $M_0$  が存在すると仮定する。このとき、 $(u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon)$  と  $(w_1, w_2)$  の差は、 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  のとき以下のように評価できる。

$$\begin{cases} \sup_{t \in [0, T]} \|u_1^\varepsilon(\cdot, t) + u_2^\varepsilon(\cdot, t) - w_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon, \\ \sup_{t \in [0, T]} \|u_3^\varepsilon(\cdot, t) - w_2(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\varepsilon. \end{cases}$$

ここで  $C = C(w_1, w_2, \varepsilon_0, M_0, T)$  は  $\varepsilon$  によらない定数である。

この定理は、交差拡散のような複雑な拡散もランダムウォークと反応によって生成できることを意味している。この証明は、本質的に [23] に基づいており、[20] で拡張している。方程式系 (13) や (12) は、Lyapunov 関数をもつように見えないが、エネルギー関数を構成することにより証明している。また、有界性 (16) を仮定する代わりに、一様 Lipschitz 連続性を仮定することも可能である。村川 [44] は、一様 Lipschitz 連続性を仮定して、両方の種に交差拡散効果が入った方程式系の反応拡散近似を行っている。

次に定常解に関する結果を紹介しよう。

**定理 5 (出原・三村 [25, Theorem 2])**  $(w_1, w_2)$  を (13) のなめらかな定常解とし (存在するとして) , その定常解のまわりの線形化作用素が  $(W^{2,p}(\Omega))^2$  から  $(L^p(\Omega))^2$  への全単射になっていると仮定する。このとき、正数  $\varepsilon_0, C$  が存在して、  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  のとき

$$\|w_1 - (u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon)\|_{W^{2,p}(\Omega)} + \|w_2 - u_3^\varepsilon\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\varepsilon$$

をみたす (12) の定常解  $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon)$  が唯一つ存在する。

## 2.3 反応平衡集合

ここまでの例を踏まえ、反応拡散近似をどの程度一般化できるかということを考えてみよう。

まず、前掲の例  $(P^\varepsilon)$  と  $(Q^\varepsilon)$  に関連する基本的な例として、

$$(R^\varepsilon) \quad \begin{cases} u_{1t} = d_1 \Delta u_1 - \frac{1}{\varepsilon} u_1 u_2 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_{2t} = -\frac{1}{\varepsilon} u_1 u_2 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

の反応平衡集合

$$\mathcal{E}_{R^\varepsilon} = \{(u_1, 0) \mid u_1 \geq 0\} \cup \{(0, u_2) \mid u_2 \geq 0\}$$

を考えよう (図 2)。明らかに  $\mathcal{E}_{R^\varepsilon}$  は適当な 1 次元線形空間上の関数のグラフと見なせる。

前掲の  $(P^\varepsilon)$  に対する反応平衡集合

$$\mathcal{E}_{P^\varepsilon} = \{(u_1, 0) \mid u_1 \geq 0\} \cup \{(0, u_2) \mid u_2 \geq 0\}$$

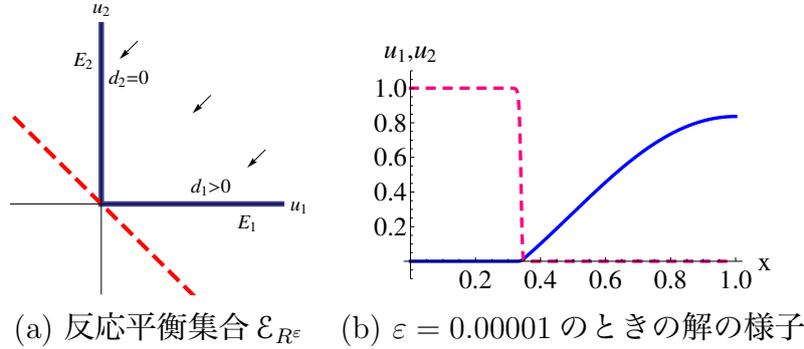


図 2:  $(R^\varepsilon)$  の反応平衡集合  $\mathcal{E}$  と解のスナップショット. (a) 実線が  $(R^\varepsilon)$  の反応平衡集合  $\mathcal{E}_{R^\varepsilon}$  を表し, 破線は反応平衡集合の射影  $\mathbf{P}\mathcal{E}_{R^\varepsilon}$  を表している. (b) 実線は  $u_1$  のグラフで, 破線は  $u_2$  のグラフである.

および,  $(Q^{(\varepsilon)})$  に対する反応平衡集合

$$\mathcal{E}_{Q^\varepsilon} = \{(u_1, 0, 1) \mid u_1 \geq 0\} \cup \{(0, 0, u_3) \mid 0 \leq u_3 \leq 1\} \cup \{(0, u_2, 0) \mid u_2 \geq 0\}$$

も適当な 1 次元線形空間上の関数のグラフと見なせる (図 3 参照).

反応平衡集合  $\mathcal{E}$  と極限系の関係について考えてみよう. 同一の  $\mathcal{E}$  に対応する  $\mathbf{G}$  は複数存在するので, 対応する極限系は異なり得る. 例えば,  $(P^\varepsilon)$  を変形して,

$$\begin{cases} u_{1t} = d_1 \Delta u_1 - \frac{s_1}{\varepsilon} u_1^{m_1} u_2^{m_2}, & x \in \Omega, t > 0, \\ u_{2t} = d_2 \Delta u_2 - \frac{s_2}{\varepsilon} u_1^{m_3} u_2^{m_4}, & x \in \Omega, t > 0 \end{cases}$$

としよう.  $m_j = 1$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) のときが,  $(P^\varepsilon)$  であるが,  $m_j > 0$  なら, 値によらず  $\mathcal{E}$  は変化しない. しかし, 例えば,  $m_1 = m_4 = 2, m_2 = m_3 = 1$  のときは, 正值解  $(u_1, u_2)$  が  $(0, 0)$  に収束することが比較原理から示される. また,  $d_1 > 0, d_2 = 0, m_1 = m_2 = m_4 = 1, m_3 = 2$  のときは,  $V_n = 0$  となり界面が移動しないことがわかる ([21] 参照). このように, 極限系は,  $\mathcal{E}$  の情報だけでは決まらず, 常微分方程式系 (6) の解の時間大域的挙動にも左右される.

これらの事実に留意し,  $m$  次元ベクトル値関数  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\varepsilon(x, t)$  に対する反応拡散系 (3) の  $\varepsilon \rightarrow +0$  における極限を次のように記述してみよう. ランク  $m_0 (< m)$  の適当な  $m$  次正方行列  $\mathbf{P}$  であって, 任意の  $\mathbf{u}$  に対して

$$\mathbf{P}\mathbf{G}(\mathbf{u}) = 0$$

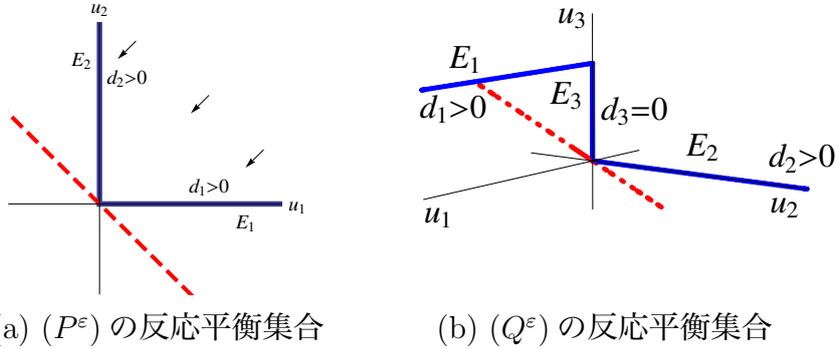


図 3: 反応平衡集合  $\mathcal{E}$  の様子. 実線が  $(P^\epsilon)$ ,  $(Q^\epsilon)$  の反応平衡集合  $\mathcal{E}_{P^\epsilon}$ ,  $\mathcal{E}_{Q^\epsilon}$  をそれぞれ表し, 破線は反応平衡集合の射影  $\mathbf{P}\mathcal{E}_{P^\epsilon}$ ,  $\mathbf{P}\mathcal{E}_{Q^\epsilon}$  を表している.

をみたくも存在し, (3) の反応平衡集合  $\mathcal{E}$  が  $\mathbf{P}\mathbb{R}^m$  (の一部) において定義される  $m_0$  次元関数  $\mathbf{h}$  のグラフとして表せる状況を想定しよう. このとき,  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \mathbf{u}^\epsilon$  が形式的には  $\mathcal{E}$  内に値をとるから,  $\mathbf{w} = \mathbf{P}(\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \mathbf{u}^\epsilon)$  とおくと,  $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \mathbf{u}^\epsilon = \mathbf{w} + \mathbf{h}(\mathbf{w})$  が成り立つ. したがって, (3) の両辺に  $\mathbf{P}$  を掛けて,  $\epsilon \rightarrow +0$  とすると, 形式的には

$$(17) \quad \mathbf{w}_t = \Delta \mathbf{P}\mathbf{D}(\mathbf{w} + \mathbf{h}(\mathbf{w})) + \mathbf{P}\mathbf{F}(\mathbf{w} + \mathbf{h}(\mathbf{w})), \quad x \in \Omega, t > 0$$

が得られる. これが (3) の  $\epsilon \rightarrow +0$  における極限であり,  $m_0$  次元線形空間  $\mathbf{P}\mathbb{R}^m$  に値をとる独立変数  $\mathbf{w}$  が満たすはずの非線形偏微分方程式系である.

例えば,  $(R^\epsilon)$  では, 極限関数  $u_1 := \lim_{\epsilon \rightarrow +0} u_1^\epsilon$ ,  $u_2 := \lim_{\epsilon \rightarrow +0} u_2^\epsilon$  に対して  $w = u_1 - u_2$  とおくと,  $(u_1, u_2) \in \mathcal{E}_{R^\epsilon}$  だから  $\epsilon \rightarrow +0$  の極限では  $(R^\epsilon)$  は

$$(R) \quad w_t = \Delta d(w) \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+$$

に縮約される. ただし,  $d(r) := d_1 r^+$  を用いた. この例では,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{0},$$

であり, 極限問題 (17) における行列  $\mathbf{P}$  のランク  $m_0$  は 1 である: 実際,

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \frac{w}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{w}) = \frac{|w|}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$PD(\mathbf{w} + \mathbf{h}(\mathbf{w})) = \frac{d(w)}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} + \mathbf{h}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} w^+ \\ w^- \end{pmatrix}$$

だから, (17) は (R) そのものと見なしてよい. さらに, 極限問題 (R) は適当な初期条件の下で, (P) 及び (Q) と同様に, 潜熱が  $\lambda$  の 1 相 Stefan 問題の弱形式と見なすことができる: 実際,  $w(x, t) > 0$  の領域を  $\Omega_1(t)$  と表し,  $\Gamma(t) = \partial\Omega_1(t) \setminus \partial\Omega$  と定め, 正の定数  $\lambda$  に対して極限関数  $u_2$  の初期条件を

$$u_{02}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_1(0), \\ \lambda, & x \in \Omega \setminus \overline{\Omega_1(0)} \end{cases}$$

と設定し, 極限関数  $u_1$  の初期値と界面  $\Gamma$  の適当な滑らかさを仮定すると,  $u_1$  と  $\Gamma$  は

$$(R^*) \quad \begin{cases} u_{1t} = d_1 \Delta u_1 & \text{in } Q_1 := \bigcup_{t \in [0, T]} \Omega_1(t) \times \{t\}, \\ u_1 = 0 & \text{on } \Gamma := \bigcup_{t \in [0, T]} \Gamma(t) \times \{t\}, \\ \lambda V_n = -d_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

をみることがわかる ([12],[13]). ただし,  $n$  は  $\partial\Omega_1(t)$  の外向き単位法ベクトルである.

( $P^\varepsilon$ ) については, 次の ( $Q^\varepsilon$ ) と同様に計算できるので省略する.

( $Q^\varepsilon$ ) では,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} f(u_1) \\ g(u_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m_0 = 1$$

であり,  $w = u_1/s_1 - u_2/s_2 + \lambda u_3$  および

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{s_1}{s_2} & s_1 \lambda \\ -\frac{s_2}{s_1} & 1 & -s_2 \lambda \\ \frac{1}{s_1 \lambda} & -\frac{1}{s_2 \lambda} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \frac{w}{2} \begin{pmatrix} s_1 \\ -s_2 \\ \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \frac{s_1(|w - \lambda| - \lambda)}{2} \\ \frac{s_2|w|}{2} \\ \frac{|w| - w + \lambda - |w - \lambda|}{2\lambda} \end{pmatrix}$$

とおけば,

$$PD(\mathbf{w}+\mathbf{h}(\mathbf{w})) = \frac{d(\varphi_\lambda(w))}{2} \begin{pmatrix} s_1 \\ -s_2 \\ \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}+\mathbf{h}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} s_1(w-\lambda)^+ \\ s_2w^- \\ \frac{w-(w-\lambda)^++w^-}{\lambda} \end{pmatrix}$$

となる. こうして (17) は (Q) に等しくなり, 潜熱  $\lambda$  の 2 相 Stefan 問題 (Q\*) の弱形式と見なせることがわかる.

ところで, 反応平衡集合  $\mathcal{E}$  の射影先のパラメータ  $\mathbf{w}$  の方程式 (17) においては, 拡散項が,  $\mathcal{E}$  の形状を表す関数  $\mathbf{h}(\mathbf{w})$  を用いて表現されるため, 上記 3 つの例 ( $P^\varepsilon$ ), ( $Q^\varepsilon$ ), ( $R^\varepsilon$ ) のように,  $\mathbf{h}(\mathbf{w})$  の導関数が連続でない場合には, 領域内部で  $\mathbf{w}(x, t)$  に何らかの特異性が生じる: すなわち,  $\mathcal{E}$  の“角”が自由境界として現れる. 例えば ( $P^\varepsilon$ ) と ( $R^\varepsilon$ ) では,  $u_1 = u_2 = 0$  が自由境界として現れている. それに対して ( $Q^\varepsilon$ ) では,  $(u_1, u_2, u_3) = (0, 0, 1)$  に対応する自由境界と  $(u_1, u_2, u_3) = (0, 0, 0)$  に対応する自由境界が考えられるが, 実際には, 2 つの自由境界が重なって 1 つの自由境界として現れている. ここで, (17) における  $PD(\mathbf{w} + \mathbf{h}(\mathbf{w}))$  の  $\mathbf{w}$  に関する導関数  $d(\mathbf{w})$  を反応平衡集合上の“拡散係数”と呼ぶことにしよう. 図 2-3 には, 反応平衡集合上の拡散係数  $d_1, d_2, d_3$  も表示してある:  $\mathcal{E}_{P^\varepsilon}$  では至る所で拡散係数が正であるのに対し,  $\mathcal{E}_{Q^\varepsilon}$  と  $\mathcal{E}_{R^\varepsilon}$  には拡散係数が 0 になる点が連続的に分布している. 両者のこの違いは, 自由境界が「コーナー層として現れるか」「遷移層として現れるか」の違いを反映している.

上記 3 例では, 反応平衡集合上の拡散係数が区分的に定数になったが, 前節で紹介した交差拡散系を近似する反応拡散系 (12) では, 拡散係数が反応平衡集合上で連続的に値を変えることがわかる. ただし, (12) について詳細を記すと煩雑になるので, 同様の性質をもつ明快な例として, 多孔質媒体中の拡散方程式を考えてみよう.  $k > 1$  として

$$(S^*) \quad w_t = d_1 \Delta w^k \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+$$

は多孔質媒体流と呼ばれる. この方程式の反応拡散近似は, 村川 [44] によって研究されている. この論文では, ( $S^*$ ) の近似として, 反応拡散系

$$(S^\varepsilon) \quad \begin{cases} u_{1t} = d_1 \Delta u_1 - \frac{1}{\varepsilon} \{u_1 - (u_1 + u_2)^k\} & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_{2t} = \frac{1}{\varepsilon} \{u_1 - (u_1 + u_2)^k\} & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

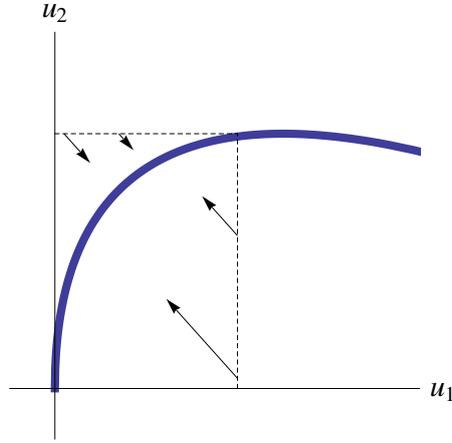


図 4: 多孔質媒体流 ( $S^\varepsilon$ ) の反応平衡集合と (6) の正不変領域.

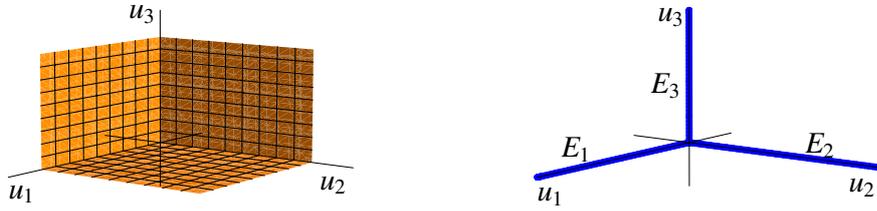
を導入している. この反応平衡集合は,

$$\mathcal{E}_{S^\varepsilon} = \{(u_1, u_2) \mid u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_1 = (u_1 + u_2)^k\}$$

であり, 図 4 のようになる. 特に,  $\mathcal{E}_{S^\varepsilon}$  上の拡散係数は,  $d_1 k (u_1 + u_2)^{k-1}$  と見なせるため,  $\mathcal{E}_{S^\varepsilon}$  上で連続的に値を変えることがわかる. ただし, この例では,  $\mathcal{E}_{S^\varepsilon}$  を表す関数  $\mathbf{h}(\mathbf{w})$  の導関数が連続ではあるものの,  $\mathcal{E}_{S^\varepsilon}$  の端点  $u_1 = u_2 = 0$  において拡散係数が退化するために, 多孔質媒体流 ( $S^*$ ) には自由境界 (解の台の境界) が現れることに留意しよう. 因みに, 交差拡散系 (13) の近似 (12) では, 反応平衡集合の至る所で拡散係数が連続かつ非退化であり, 交差拡散系 (13) では自由境界が現れない.

ここまでの例 ( $P^\varepsilon$ ), ( $Q^\varepsilon$ ), ( $R^\varepsilon$ ), ( $S^\varepsilon$ ) はすべて, 反応平衡集合が 1 次元の関数のグラフと見なせたが, 次の例は, 反応平衡集合が 2 次元の関数のグラフになる: 反応拡散系

$$(T^\varepsilon) \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = d_1 \Delta u_1 + f_1(u_1, u_2, u_3) - \frac{1}{\varepsilon} u_1 u_2 u_3, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = d_2 \Delta u_2 + f_2(u_1, u_2, u_3) - \frac{1}{\varepsilon} u_1 u_2 u_3, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = d_3 \Delta u_3 + f_3(u_1, u_2, u_3) - \frac{1}{\varepsilon} u_1 u_2 u_3, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = \frac{\partial u_3}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases}$$



(a) 反応拡散系  $(T^\varepsilon)$  の反応平衡集合 (b) 反応拡散系  $(P_m^\varepsilon)$  の反応平衡集合

図 5: 反応平衡集合  $\mathcal{E}$  の様子.

の反応平衡集合

$$\mathcal{E}_{T^\varepsilon} = \{(u_1, u_2, 0) \mid u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\} \cup \{(0, u_2, u_3) \mid u_2 \geq 0, u_3 \geq 0\} \\ \cup \{(u_1, 0, u_3) \mid u_1 \geq 0, u_3 \geq 0\}$$

は, 図 5(a) のようになる. この集合は, 2次元のグラフで表現できるが, そのグラフは微分が不連続な点を含むので, 界面が生成されることが期待される. 村川 他 [47] では, 極限方程式の弱形式の導出に成功しているが, 3つの自由境界が同時に存在するため, 強形式の自由境界問題の導出には至っていない.

ところで, 反応平衡集合が, 1次元にはなるが, 適当な関数のグラフと見なせない例もある. 実際, 方程式系

$$(P_m^\varepsilon) \begin{cases} u_{it} = d_i \Delta u_i + f_i(u_i) - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j \neq i} a_{ij} u_j u_i & (x \in \Omega, t > 0, i = 1, \dots, m), \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 & (x \in \partial\Omega, t > 0, i = 1, \dots, m) \end{cases}$$

の反応平衡集合

$$\mathcal{E}_{P_m^\varepsilon} = \bigcup_{i=1}^m \{(0, \dots, 0, u_i, 0, \dots, 0) \mid u_i \geq 0\}$$

は, 例えば  $m = 3$  の場合には図 5(b) のようになるので, 関数のグラフとして表現することはできない. そのため, 極限方程式の導出が難しくなる. この方程式の解の極限が存在することは, Hilhorst 他 [16] で示されている. この方程式系は,  $(P^\varepsilon)$  の拡張系であるが,  $(Q^\varepsilon)$  に対する同様な拡張系  $(Q_m^\varepsilon)$  に対して,  $\varepsilon \rightarrow +0$  のとき解が  $L^1$  収束することが示されて

いる。しかし、 $\varepsilon_{P_m^c}$  からもわかるように原点での取り扱いが難しくなる。これは接合点となっているため、極限関数がみたす方程式系は、まだ導出されていない。反応平衡集合が単位球のときは、調和写像になる。Keller 他 [31] の研究を挙げておく。

このように反応平衡集合から、ある程度極限方程式を想像できる。逆に、極限方程式を決めると、それを極限とするような反応拡散系を作ることもしできるが、「どのような方程式系が反応拡散近似が可能であるか、あるいは反応拡散近似できないか？」という問題は、Stefan 問題等一部の方程式を除いて、まだわかっていない。

## 3 応用

### 3.1 交差拡散誘導不安定性と Turing の拡散誘導不安定性との関係

ここでは、パターン形成への応用を考えよう。Turing の拡散誘導不安定性 [56] と呼ばれるパターン形成に重要なメカニズムがある。常微分方程式系の安定な定数定常解が、拡散効果を加えることによって不安定な定常解となり、空間規則的な非定数定常解が現れる現象である。この現象は、速く拡散する抑制因子と遅く拡散する活性因子によって形成される。活性因子の存在によって活性因子は局所的に増殖する。しかし、抑制因子は、活性因子より速く拡散して活性因子がまだ多くない場所では、活性因子の増殖を抑えることができる。そのため、適切なサイズが選択され周期的な非一様パターンが形成される。

先に挙げた競争系において、競争が弱いとき、つまり、

$$\frac{b_1}{a_2} < \frac{r_1}{r_2} < \frac{a_1}{b_2},$$

の条件下で、拡散競争系 (5) を考えよう。この場合、拡散のない競争系では、

$$(e_1, e_2) = \left( \frac{a_2 r_1 - b_1 r_2}{a_1 a_2 - b_1 b_2}, \frac{-b_2 r_1 + a_1 r_2}{a_1 a_2 - b_1 b_2} \right)$$

が安定定常解として存在し、 $(0, 0)$ ,  $(r_1/a_1, 0)$  と  $(0, r_2/a_2)$  の3つが不安定定常解として存在している。この場合に、拡散を加えた拡散競争系 (5)

を考えても、定数定常解  $(e_1, e_2)$  は不安定化しないので、Turing の拡散誘導不安定化は起きない。実際、比較定理を用いることにより、すべての正值解 (各成分が正の解) は  $(e_1, e_2)$  に収束することが示される。

一方、三村-川崎 [38] は、この条件下でも交差拡散系 (13) では、定数定常解  $(e_1, e_2)$  から安定な非定数定常解が分岐することを示した。  $\alpha$  が小さいときは、  $\alpha = 0$  のときと同様、定数定常解  $(e_1, e_2)$  は (13) でも安定である。しかし、  $\alpha$  を大きくすると安定性を失い不安定になる ([26, 36] 参照)。これは、交差拡散によって空間棲み分けが可能になったことを意味しており交差拡散誘導不安定性と呼ばれる。この不安定化は、先に述べたように (5) では観察されないので、交差拡散の効果によるものであることがわかる。しかしながら、この交差拡散誘導不安定性が、実は Turing の拡散誘導不安定性と見なせることを反応拡散近似を用いて説明しよう。

定数定常解  $(e_1, e_2)$  は、(13) の定数定常解にもなっている。この定常解のまわりで線形化しよう。まず、方程式を再掲しておく。  $\alpha > 0$  および

$$\begin{cases} f(w_1, w_2) = (r_1 - a_1 w_1 - b_1 w_2) w_1, \\ g(w_1, w_2) = (r_2 - b_2 w_1 - a_2 w_2) w_2 \end{cases}$$

を用いて

$$(18) \quad \begin{cases} w_{1t} = \Delta[(d_1 + \alpha w_2) w_1] + f(w_1, w_2), & x \in \Omega, t > 0, \\ w_{2t} = d_2 \Delta w_2 + g(w_1, w_2), & x \in \Omega, t > 0 \end{cases}$$

となる。(18) の右辺の  $(e_1, e_2)$  のまわりでの線形化作用素は

$$\begin{pmatrix} d_1 \Delta + \alpha e_2 \Delta + f_{w_1}(e_1, e_2) & \alpha e_1 \Delta + f_{w_2}(e_1, e_2) \\ g_{w_1}(e_1, e_2) & d_2 \Delta + g_{w_2}(e_1, e_2) \end{pmatrix}$$

となる。  $\sigma$  を Neumann 境界条件下での  $-\Delta$  の固有値の一つとしよう。このとき、線形化方程式の固有値  $\mu$  は、特性多項式  $\Xi^*(\mu) = 0$  の根となる。ここで、

$$\Xi^*(\mu) := \begin{vmatrix} -d_1 \sigma - \alpha e_2 \sigma + f_{w_1}(e_1, e_2) - \mu & -\alpha e_1 \sigma + f_{w_2}(e_1, e_2) \\ g_{w_1}(e_1, e_2) & -d_2 \sigma + g_{w_2}(e_1, e_2) - \mu \end{vmatrix}.$$

である。

次に、(14) を用いると、反応拡散近似 (12) の対応する定数定常解  $(e_1^*, e_2^*, e_3^*)$  は

$$e_3^* = e_2, \quad e_2^* = \frac{h_{1 \rightarrow 2}(e_3^*) e_1}{h_{1 \rightarrow 2}(e_3^*) + h_{2 \rightarrow 1}(e_3^*)} = \frac{e_3^*}{M_2} e_1 = \frac{e_2}{M_2} e_1, \quad e_1^* = \left(1 - \frac{e_2}{M_2}\right) e_1$$

と計算できるので,  $(e_1^*, e_2^*, e_3^*)$  のまわりの (12) の線形化作用素の固有値  $\mu$  を決定する特性多項式  $\Xi^\varepsilon(\mu)$  を  $\Xi^*(\mu)$  と同様に定義すると

$$(19) \quad \Xi^\varepsilon(\mu) = -\frac{h_{1 \rightarrow 2}(e_2) + h_{2 \rightarrow 1}(e_2)}{\varepsilon} \Xi^*(\mu) + \Xi(\mu)$$

と分解でき,

$$\Xi^*(\mu) = \mu^2 + O(\mu), \quad \Xi(\mu) = -\mu^3 + O(\mu^2) \quad (|\mu| \rightarrow \infty)$$

をみたましていることがわかる ([20, §3] 参照). 特に,  $\varepsilon$  が十分小さければ, (15) および (19) から,  $\Xi^\varepsilon(\mu) = 0$  の 3 根は,  $\Xi^*(\mu) = 0$  の 2 根に近いものと, 負の根よりなることが従う.

したがって,  $\varepsilon$  が十分小さければ, (18) と (12) の定常解の関係について, 次が成り立つ:  $\alpha = 0$  のとき,  $(e_1^* + e_2^*, e_3^*)$  が (18) の安定定常解だから,  $(e_1^*, e_2^*, e_3^*)$  も (12) の安定定常解となる; しかし,  $\alpha$  を大きくすると  $\Xi^*(\mu) = 0$  が交差拡散誘導不安定性から正の固有値をもつことになるため, (12) も正の固有値をもつ.

一方, 十分小さな  $\varepsilon$  に対する (12) において,  $h_{1 \rightarrow 2}(s)$  として  $s$  の増加関数を選ぶ限り,  $u_3$  は活性因子の役割を果たし,  $u_2$  が抑制因子の役割をすることにより,  $u_2$  の拡散係数  $d_1 + \alpha M_2$  が大きくなると, Turing の不安定化が起きることを意味している. この不安定化は,  $\varepsilon$  が十分小さいので, 極限問題にも引き継がれる. こうして, 交差拡散誘導不安定性がその反応拡散近似の拡散誘導不安定性として理解できることがわかる.

### 3.2 モデリングへの応用

反応拡散近似のモデリングへの応用を考察しよう. 交差拡散系の反応拡散近似は, モデリングにおいてどのような効果を導入する必要があるのかについて示唆を与えている. 交差拡散系は, 他種による環境要因を非線形拡散によって表現している. しかし, 必ずしも非線形拡散が必要ではなく, 通常のランダムウォーク (線形拡散) する個体が速度の違いを切り替える戦略を持っていればよいことを第 2.2 節の考察は意味している. つまり, 個々の生物が取っている戦略は, その場所の他生物種の密度に応じて速度を変えるという戦略である. 一方, 交差拡散系のフラックスが,

$$J = -\nabla(D(x)u) = -D(x)\nabla u - u\nabla D(x)$$

と分解されるので、密度分布からわかる戦略は、他種の密度勾配を感知して移動する戦略として観測される。このように、各個体が取っている戦略と密度分布からわかる見かけ上の戦略とは異なることが示唆される。密集効果や分散効果があるからといって、移流効果（勾配効果）を導入するのは、短絡的である。

では、Keller-Segel 型の移流効果 (attractive transition) を産み出す原因は何であろうか？ 離散モデルから連続モデルを導出するとき、その離散性は消失されるが、このとき、移流効果を産み出すことが可能となる。Keller-Segel 型の移流効果を産み出す可能性のあるものとして、考えられるものを列挙しよう：

- (i) 各個体の特徴的大きさによる、消失しきれない離散性
- (ii) 各個体はその大きさを使って勾配を感知する
- (iii) 時間履歴として、勾配を感知する

離散モデルと連続モデルの関係性を含むモデリングの数理を確立し、普及していくことが、今後、重要な問題となっていくと思われる。

### 3.3 数値計算への応用

自由境界問題の数値計算においては、境界を決定することが困難となる場合もある。多孔質媒体流 ( $S^*$ ) を再考しよう。この方程式は、コンパクトな台をもつ初期値から出発すれば、台の境界は、自由境界として時間発展しながら運動する。しかし、 $\{u > 0\}$  と  $\{u = 0\}$  の境界を数値的に決定することは、誤差の影響も受けやすくかなり難しい。そこで、中木他 [48] では、その自由境界を表現する手法として、反応拡散近似を試みている。 $(S^*)$  の解  $w$  を近似する  $u_1$  の他に、仮想的な量  $u_2$  を導入し、

$$(20) \quad \begin{cases} u_{1t} = \Delta u_1^2 - \frac{2}{\varepsilon} u_1^{1.5} u_2^2, \\ u_{2t} = -\frac{1}{\varepsilon} u_1 u_2 \end{cases}$$

を用いると、 $u_1$  はコーナー層を形成するのに対し、 $u_2$  は遷移層を形成する。遷移層では  $u_2$  の値の変化が大きいので、境界の決定が精度よくできるものと期待される。 $u_2$  の遷移層が自由境界のよい近似になっていることを、厳密解として知られる Barenblatt 解を用いて [48] では考察している。

ここで重要なのは、ベキ指数である。これまで扱ってきた  $(P^\varepsilon)$  や  $(R^\varepsilon)$  では、非線形項のベキ指数は一致していた。しかしながら、(20) では  $u_1$  の方程式と  $u_2$  の方程式の非線形項のベキ指数が異なるため、 $u_1$  と  $u_2$  の線形結合で非線形性が打ち消し合わないので解析的扱いが困難である ([21] 参照)。

$u_1$  はコーナー層なので自由境界近辺で 0 に近い。そのため、 $u_1^{1.5}u_2^2$  と  $u_1u_2$  を比較すると、 $u_1^{1.5}u_2^2$  の方が極めて小さい。これは、 $u_1u_2$  が  $u_{2t}$  に与える影響に較べて、 $u_1^{1.5}u_2^2$  が  $u_{1t}$  に与える影響は極めて小さいことを意味している。このことから、 $2u_1^{1.5}u_2^2/\varepsilon$  は極限方程式  $u_{1t} = \Delta u_1^2$  の自由境界の運動に影響を与えず、この自由境界が、 $u_2$  の遷移層を伴って動いていくことが期待される。こうして、極限方程式は、 $d_1 = 1$ ,  $k = 2$  とした多孔質媒体流 ( $S^*$ ) であり、 $\{u_1 > 0\}$  の補集合が、 $\{u_2 > 0\}$  となることが期待される。しかし、この説明では、指数が 1.5 や 2 である必然性はなく、この指数が適切な理由はわかっていない。

次に自由境界問題の数値解法として用いられるペナルティ法の考え方と反応拡散近似との関係について、1次元区間  $\Omega = [0, 1]$  上の 1相 Stefan 問題を例に説明しよう。 $x = \ell(t)$  を自由境界の位置とし、初期関数は、

$$u_0(x) > 0 \quad (0 \leq x < \ell_0), \quad u_0(x) = 0 \quad (\ell_0 \leq x < 1)$$

としておく。1相 Stefan 問題

$$(21) \quad \begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \ell(t), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x < \ell_0, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u(\ell(t), t) = 0, & t > 0, \\ \ell'(t) = -u_x(\ell(t), t), & t > 0, \\ \ell(0) = \ell_0 \end{cases}$$

を考えよう。この問題の古典解は  $\ell'(t) > 0$  をみたすから、(21) を  $\cup_{0 \leq t \leq T} [0, \ell(t)] \times \{t\}$  上で積分することにより、

$$(22) \quad \ell(T) = \ell_0 - \int_0^{\ell(T)} u(x, T) dx + \int_0^{\ell_0} u_0(x) dx$$

が得られることに注意しておく。(21) に対し、ペナルティ項を付け加えた次の方程式を区間  $\Omega = [0, 1]$  上で考える：

$$(23) \quad \begin{cases} u_t^\varepsilon = u_{xx}^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \chi(x, t) u^\varepsilon, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u^\varepsilon(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u_x^\varepsilon(0, t) = 0, \quad u_x^\varepsilon(1, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

ここで、 $\chi$  は区間  $[\ell^\varepsilon(t), 1]$  の定義関数であり、近似的な自由境界の位置  $\ell^\varepsilon(t)$  は、

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\ell^\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \chi(x,t)u^\varepsilon(x,t)dx, \\ \ell^\varepsilon(0) = \ell_0 \end{cases}$$

を用いて計算する。実際、 $u^\varepsilon$  は区間  $[\ell^\varepsilon(t), 1]$  上では小さいことが期待されるので (22) から

$$(25) \quad \ell^\varepsilon(t) = \ell_0 - \int_0^1 u^\varepsilon(x,t)dx + \int_0^{\ell_0} u_0(x)dx$$

がよい近似になっていることが期待でき、(25) を  $t$  で微分して (23) を代入することによって (24) が近似式として得られることがわかる。

さて、(23) は、 $(R^\varepsilon)$  によく似ていることに気が付く。実際、

$$\int_0^1 \chi_t dx = \frac{d}{dt}(1 - \ell^\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \chi(x,t)u^\varepsilon(x,t)dx$$

と合わせると、 $u_2$  と  $\chi$  は形状、方程式ともに非常に近い関係にあることがわかる。このことは、反応拡散近似とペナルティ法の関連性を示唆している。

### 3.4 関連する話題

$(R^\varepsilon)$  のような簡単な場合でも反応項のうち一方の符号を変えると解の収束性はそれほど単純でないことを示す例を挙げよう：

$$(26) \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} u_1 u_2 \\ -u_1 u_2 \end{pmatrix}$$

ここで、拡散を無視した常微分方程式系の解 ( $x$  について一様な (26) の解) の挙動は、 $u_1 + u_2$  が時間に依存しないことから、 $(u_1(0) + u_2(0), 0)$  に収束することがわかる。極めて単純な挙動をしている。しかし、拡散を考慮した方程式 (26) の解の典型的な挙動は、図6のようになる。解が一瞬大きくなっているのがわかる。 $\varepsilon$  を小さくすると、解の最大値はどんどん大きくなっていく。この方程式の理論的な取り扱いは困難であり、解の収束性に関しては、わかっていない。このような場合を取り扱うため

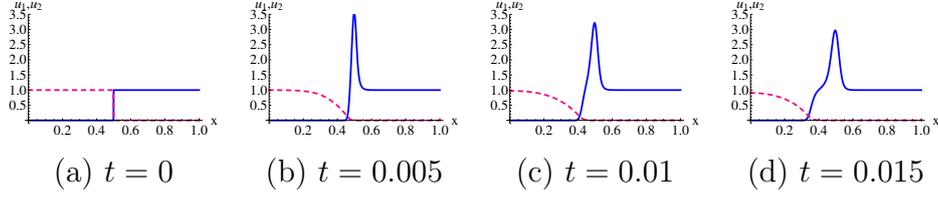


図 6:  $\varepsilon = 0.000001$  のときの (26) の解の時間発展. 実線は  $u_1$  のグラフで, 破線は  $u_2$  のグラフである.

には, 非線形項に工夫が必要である. そのような研究として, Monneau 他 [43] を挙げておこう.

次に  $\mathbf{G}$  が線形であっても極限系が不適切になる例を挙げよう.

$$(27) \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} u_2 + \alpha(u_3 + u_4) - u_1 \\ u_1 - \alpha(u_3 + u_4) - u_2 \\ u_4 + \beta(u_1 + u_2) - u_3 \\ u_3 - \beta(u_1 + u_2) - u_4 \end{pmatrix}$$

を考える. (2) と同様の計算から  $w_1 = u_1 + u_2$ ,  $w_2 = u_3 + u_4$  とおくと,

$$\varepsilon = \left\{ \left( \frac{w_1 + \alpha w_2}{2}, \frac{w_1 - \alpha w_2}{2}, \frac{\beta w_1 + w_2}{2}, \frac{-\beta w_1 + w_2}{2} \right) \mid w_1, w_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

となり,

$$\begin{cases} w_{1,t} = 3\Delta w_1 - \alpha\Delta w_2, \\ w_{2,t} = -\beta\Delta w_1 + 3\Delta w_2 \end{cases}$$

が極限方程式として得られる. これは,  $\alpha\beta > 9$  のとき, 適切 (well-posed) な問題とならない. 解が有界になるように (27) に適当な非線形項を加えて数値計算したのが, 図 7, 8 である. これは, 反応拡散系 (3) はどんな  $\varepsilon > 0$  に対しても適切な問題であるが, 極限問題は必ずしも適切な問題にならないことを意味している.

最後に, 双曲型方程式との関連性を説明しよう.

$$\mathbf{u}_t + \sum_{j=1}^m \mathbf{A}_j(\mathbf{u}) \mathbf{u}_{x_j} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{G}(\mathbf{u})$$

という形の双曲型方程式が研究されており, 緩和的双曲型問題 (hyperbolic relaxation problem) として取り扱われている. 詳しくは, Liu [32], Na-

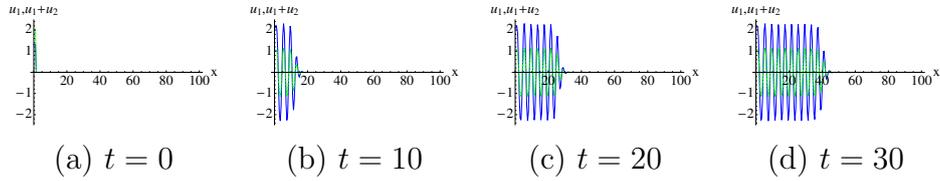


図 7:  $\varepsilon = 0.01$  のときの (27) の解の時間発展. 実線は  $u_1$  のグラフで, 破線は  $u_1 + u_2$  のグラフである. 周期構造が時間と共に進行していく様子が見てとれる.

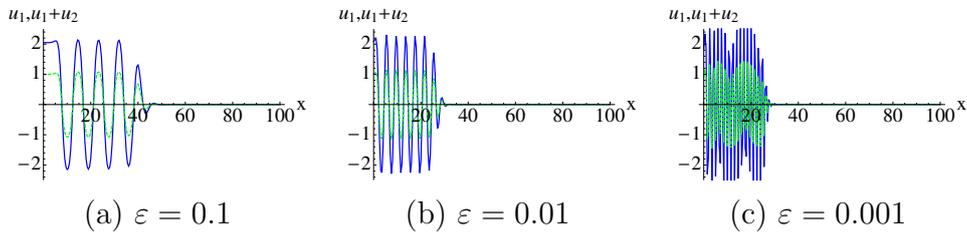


図 8:  $t = 20$  のときの (27) の解の  $\varepsilon$  についての依存性. 実線は  $u_1$  のグラフで, 破線は  $u_1 + u_2$  のグラフである.

talini [49], 川島 [30] を参照してほしい. これらの多くは,  $\mathbf{G}$  が線形の場合や第 2.2 節のような非線形項を取り扱っている.

多自由度の偏微分方程式をどのように縮約していくかは, これからの重要な問題になると思われる. この拙文は一面からの研究ではあるが, 反応拡散近似が多自由度の偏微分方程式の縮約研究の一助となれば幸いである.

## 参考文献

- [1] H. Amann, Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems, in “*Function spaces, differential operators and nonlinear analysis*,” H. Schmeisser and H. Triebel eds., Teubner-Texte Math. **133**, (1993) 9–126.
- [2] D. Bothe, The instantaneous limit of a reaction-diffusion system. Evolution equations and their applications in physical and life sci-

- ences (Bad Herrenalb, 1998), *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* **215**, 215–224 Dekker, New York, 2001.
- [3] D. Bothe and D. Hilhorst, A reaction-diffusion system with fast reversible reaction, *J. Math. Anal. Appl.* **286**, 125-135 (2003).
- [4] Y.S. Choi, R. Lui and Y. Yamada, Existence of global solutions for the Shigesada-Kawasaki-Teramoto model with weak cross-diffusion, *Discrete Contin. Dynam. Systems* **9** (2003), 1193–1200.
- [5] E.C.M. Crooks, E.N. Dancer and D. Hilhorst, On long-time dynamics for competition-diffusion systems with inhomogeneous Dirichlet boundary conditions. *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **30** (2007), 1–36.
- [6] E.C.M. Crooks, E.N. Dancer, D. Hilhorst, M. Mimura and H. Ninomiya, Spatial segregation limit of a competition-diffusion system with Dirichlet boundary conditions. *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **5** (2004), 645–665.
- [7] E.N. Dancer and Y. Du, Competing species equations with diffusion, large interactions, and jumping nonlinearities, *J. Diff. Eq.* **114**, 434-475 (1994).
- [8] E.N. Dancer and Z. Guo, Uniqueness and stability for solutions of competing species equations with large interactions. *Comm. Appl. Nonlinear Analysis* **1**, 19-45 (1994).
- [9] E.N. Dancer, D. Hilhorst, M. Mimura, and L.A. Peletier, Spatial segregation limit of a competition-diffusion system. *European J. Appl. Math.*, **10** (1999), 97–115.
- [10] E. DiBenedetto, Continuity of weak solutions to a general porous medium equation. *Indiana Univ. Math. J.*, **32** (1983), 83–118.
- [11] R. Eymard, D. Hilhorst, R. van der Hout and L.A. Peletier, A reaction-diffusion system approximation of a one-phase Stefan problem. *Optimal Control and Partial Differential Equations*, J.L. Menaldi, E. Rofman and A. Sulem eds, IOS Press Amsterdam, Berlin, Oxford, Tokyo and Washington DC (2001), 156–170.

- [12] D. Hilhorst, R. van der Hout, and L.A. Peletier, The fast reaction limit for a reaction-diffusion system. *J. Math. Anal. Appl.*, **199** (1996), 349–373.
- [13] D. Hilhorst, R. van der Hout, and L.A. Peletier, Diffusion in the presence of fast reaction: the case of a general monotone reaction term. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **4** (1997), 469–517.
- [14] D. Hilhorst, R. van der Hout, and L.A. Peletier, Nonlinear diffusion in the presence of fast reaction. *Nonlinear Anal. TMA*, **41** (2000), 803–823.
- [15] D. Hilhorst, M. Iida, M. Mimura and H. Ninomiya, A competition-diffusion system approximation to the classical two-phase Stefan problem, *Japan J. Ind. Appl. Math.*, **18** (2001), 161–180.
- [16] D. Hilhorst, M. Iida, M. Mimura and H. Ninomiya, Relative compactness in  $L^p$  of solutions of some  $2m$  components competition-diffusion system, *Discrete Contin. Dynam. Systems* **21** (2008), 233–244.
- [17] D. Hilhorst, M. Mimura and H. Ninomiya, Fast Reaction Limit of Competition-Diffusion Systems, *Evolutionary Equations, Vol 5, Handbook of Differential Equations* (edited by C.M. Dafermos and Milan Pokorný), Hungary: North-Holland (2009), 105–168.
- [18] D. Hilhorst, M. Mimura and R. Schätzle, Vanishing latent heat limit in a Stefan-like problem arising in biology. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, **4** (2003), 261–285.
- [19] Y. Huang, How do cross-migration models arise? , *Mathematical Biosciences* **195** (2005), 127–140.
- [20] M. Iida, M. Mimura and H. Ninomiya, Diffusion, cross-diffusion and competitive interaction, *J. Math. Biol.* **53** (2006), no. 4, 617-641.
- [21] M. Iida, H. Monobe, H. Murakawa and H. Ninomiya, *in preparation*.

- [22] M. Iida, K. Nakashima and E. Yanagida, On certain one-dimensional elliptic systems under different growth conditions at respective infinities, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **47** (2007) 565–572.
- [23] M. Iida and H. Ninomiya, A reaction-diffusion approximation to a cross-diffusion system, “*Recent Advances on Elliptic and Parabolic Issues*” (M. Chipot and H. Ninomiya eds., World Scientific), (2006) 145–164.
- [24] R. Ikota, M. Mimura, and T. Nakaki, A Numerical Methodology for a Singular Limit Problem, *RIMS Kokyuroku* **146**, (2005) 134–147.
- [25] H. Izuhara and M. Mimura, Reaction-diffusion system approximation to the cross-diffusion competition system *Hiroshima Math. J.* **38** (2008), 315–347.
- [26] Y. Kan-on, Stability of singularly perturbed solutions to nonlinear diffusion systems arising in population dynamics, *Hiroshima Math. J.* **23** (1993), 509–536.
- [27] Y. Kan-on and M. Mimura, Segregation structures of competing species mediated by a diffusive predator. *Mathematical topics in population biology, morphogenesis and neurosciences* (1985), 123–133, *Lecture Notes in Biomath.*, 71.
- [28] P. Kareiva and G. Odell Swarms of predators exhibit “preytaxis” if individual predator use area-restricted search, *The American Naturalist* **130** (1987), 233–270.
- [29] H. Kawarada and M. Natori, Numerical solutions of a two-phase Stefan problem. *Theoretical and Applied Mechanics*, **23** (1975), 511–516.
- [30] 川島 秀一, 緩和的雙曲型保存則系の数学解析, *数学*, **61** (2009) 248–269.
- [31] J. Keller, P. Sternberg, and J. Rubinstein, Fast reaction, slow diffusion and curve shortening, *SIAM J. Appl. Math.* **49**, 116–133, (1989).

- [32] T.-P. Liu Hyperbolic conservation laws with relaxation, *Comm. Math. Phys.* **108** (1987), 153–175.
- [33] Y. Lou and W.-M. Ni, Diffusion vs cross-diffusion: an elliptic approach, *J. Differential Equations* **154** (1999), 157–190.
- [34] Y. Lou, W.-M. Ni and Y. Wu, On the global existence of a cross-diffusion system, *Discrete Contin. Dynam. Systems* **4** (1998), 193–203.
- [35] Y. Lou, W.-M. Ni and S. Yotsutani, On a limiting system in the Lotka-Volterra competition with cross-diffusion, *Discrete Contin. Dynam. Systems* **10** (2004), 435–458.
- [36] H. Matano and M. Mimura, Pattern formation in competition-diffusion systems in nonconvex domains, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.* **19** (1983), 1049–1079.
- [37] M. Mimura, Spatial distribution of competing species, *Lecture Notes in Biomath.* **54**, 492-501 (1984).
- [38] M. Mimura and K. Kawasaki, Spatial segregation in competitive interaction-diffusion equations, *J. Math. Biol.* **9** (1980), 49–64.
- [39] M. Mimura, Y. Nishiura, A. Tesei and T. Tsujikawa, Coexistence problem for two competing species models with density-dependent diffusion, *Hiroshima Math. J.* **14** (1984), 425–449.
- [40] M. Mimura and T. Tsujikawa, Aggregating pattern dynamics in a chemotaxis-model including growth. *Physica A*, **230** (1996), 499–543.
- [41] M. Mimura, Y. Yamada and S. Yotsutani, A free boundary problem in ecology. *Japan J. Appl. Math.*, **2** (1985), 151–186.
- [42] M. Mimura, Y. Yamada and S. Yotsutani, Stability analysis for free boundary problems in ecology. *Hiroshima Math. J.*, **16** (1986), 477–498.

- [43] R. Monneau and G.S. Weiss, Self-propagating High temperature Synthesis (SHS) in the high activation energy regime *Acta Math. Univ. Comenianae* **LXXVI** (2007), pp. 99–109.
- [44] H. Murakawa, Reaction-diffusion system approximation to degenerate parabolic systems. *Nonlinearity*, **20** (2007), 2319–2332.
- [45] H. Murakawa, A regularization of a reaction-diffusion system approximation to the two phase Stefan problem. *Nonlinear Analysis, TMA*, **69** (2008), 3512–3524.
- [46] H. Murakawa, A linear scheme to approximate nonlinear cross-diffusion systems. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **45** (2011), 1141–1161.
- [47] H. Murakawa and H. Ninomiya, Fast reaction limit of a three-component reaction-diffusion system, *J. Math. Anal. Appl.* **379** (2011), 150–170.
- [48] T. Nakaki and H. Murakawa, A numerical method to Stefan problems and its application to the flow through porous media, *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2004*, 495.pdf (2004), 1–12.
- [49] R. Natalini, Recent results on hyperbolic relaxation problems, in *Analysis of systems of conservation laws (Aachen, 1997)*, Chapman & Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math., **99** (1999) 128–198
- [50] 西浦 廉政, 非平衡ダイナミクスの数理, (2009) 岩波書店.
- [51] A. Okubo, *Diffusion and ecological problems: mathematical models*, Biomathematics **10**, Springer-Verlag, 1980.
- [52] N. Shigesada, K. Kawasaki and E. Teramoto, Spatial segregation of interacting species, *J. Theoret. Biol.* **79** (1979), 83–99.
- [53] R. Temam, *Navier-Stokes Equation*, North Holland (1979).
- [54] Y. Tonegawa, On the regularity of a chemical reaction interface. *Comm. Partial Differential Equations*, **23** (1998), 1181–1207.

- [55] P. Turchin, *Quantitative analysis of movement: measuring and modeling population redistribution in animals and plants*, Sinauer, 1998.
- [56] A. M. Turing, The chemical basis of morphogenesis, *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **B237** (1952), 37–72.