

# Fourier 解析と Wavelet 入門

水谷 正大

2014 年 1 月 16 日 version 0.1

# 目次

第 I 部	Fourier 解析	1
第 1 章	内積と直交性	3
1.1	内積空間	3
1.2	関数の $L^2$ 収束と一様収束	8
1.3	直交系と直交射影	10
1.4	基底の完全性 (全体性)	20
1.5	作用素と随伴作用素	22
第 2 章	Fourier 級数	27
2.1	Fourier の方法 ~ 偏微分方程式の解法	27
2.2	さまざまな用語	30
2.3	Fourier 級数の基本	33
2.4	Dirichlet 核	38
2.5	積分正弦関数	40
2.6	Fourier 級数の計算	43
2.7	不連続関数の Fourier 級数	47
2.8	Gibbs 現象の解析	50
2.9	Fourier 級数の収束性	54
第 3 章	Fourier 変換	65
3.1	Fourier 変換と反転公式	65
3.2	Fourier 変換の性質	71
第 II 部	Wavelet 解析	73
第 4 章	Haar 関数系	75
4.1	Haar スケーリング関数と Haar wavelet 関数	75
4.2	Haar 関数系	79

---

4.3	Haar 近似関数と詳細関数再訪 . . . . .	85
4.4	Wavelet 変換：分解と再構成アルゴリズム . . . . .	90
4.5	高速ウェーブレット変換 . . . . .	101
第 5 章	離散 Haar 系 . . . . .	105
5.1	離散 Haar 関数系 . . . . .	105
5.2	2 次元 Haar Wavelet 基底 . . . . .	109
5.3	2 次元 Haar wavelet 変換 . . . . .	113
参考文献		117

## 第 I 部

# Fourier 解析



# 第 1 章

## 内積と直交性

### 1.1 内積空間

#### 1.1.1 内積

定義 1.1 ベクトル空間  $\mathbb{C}^n$  内の 2 点  $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$  の内積 (inner product)  $\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle$  を次で定義する :

$$\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{k=1}^n x_k^* y_k. \quad (1.1)$$

ここで、記号  $*$  は複素共役を表す。こうした内積 (ベクトルの成分同士の積の和) を標準内積ということがある。

このテキストでは内積を、 $(\cdot, \cdot)$  や  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ではなく、上記のように表記する。

性質 1.2 (内積の性質) ある複素空間  $V$  上で定義される内積  $\langle \cdot | \cdot \rangle : V^\dagger \times V \rightarrow \mathbb{C}$  ( $V^\dagger$  はケット空間  $V$  に共役なブラ空間を表す) は、次の性質を持つ。

- (1) 正值性 :  $\forall v \neq 0$  に対して、 $\langle v | v \rangle > 0$ ,
- (2) 共役対称性 :  $v, w \in V$  に対して、 $\langle v | w \rangle^* = \langle w | v \rangle$ ,
- (3) 線形性 :  $\forall a, b \in \mathbb{C}$  と  $u, v, w \in V$  について、 $\langle u | av + bw \rangle = a \langle u | v \rangle + b \langle u | w \rangle$ .

注意 1.3 性質 (1) に注意しよう。 $\mathbb{C}^n$  内の 2 点  $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$  の内積を式 (1.1) のように定義したのには意味がある。仮に 2 つのベクトルの内部積 (interior product)  $\sum_{k=1}^n x_k y_k$  を内積だとしたならば、たとえば  $0 \neq \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$  に対して  $\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \rangle = 0$  となってしまうからだ。

注意 1.4 内積をケットベクトル (ket vector)  $|\boldsymbol{y}\rangle$  に対するブラベクトル  $\langle \boldsymbol{x}|$  との内積ということがある。正確に言うと、ブラベクトル (bra vector)  $\langle \boldsymbol{x}|$  はケット  $|\boldsymbol{x}\rangle$  に共役なベクトルで、ブラベクトルがケットベクトルに作用して内積を定める考えるわけである。 $\langle \boldsymbol{x} | |\boldsymbol{y}\rangle$  と書くべきかもしれないが、簡素を旨として  $\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle$  と表すのである。

注意 1.5 (言い訳) ケットベクトルに「共役なベクトルとは何かな」などを説明していると面倒なので (こ

のテキストの範囲ではそれ自体が大きく問題となるようなことはない。いささか天降りではあるが、内積をこのように表記するのだけと見なして先に進もう。もし混乱したときには内積の定義に戻ればよい。

このような内積をブラケット表記として考案したのは量子力学の完成者の一人である P.A.M.Dirac である ( $\delta$  関数を考案したのも彼である)<sup>\*1</sup>。ブラ (bra) とケット (ket) 記法を使うと、後でわかるように、ブラとケットを使って線形演算子を定義することができたり、特に射影演算子を自然に表すことができなご諸計算にたいへん有効である。

**注意 1.6** ベクトルの内積定義を  $\sum_{k=1}^n x_k y_k^*$  と後方を複素共役とする流儀もある。どちらでも一貫すれば理論内容は変わらない。ブラ・ケット表記を使う場合、始めにケットありきとして、内積を (1.1) と定義するのが自然である。

**例 1.7**  $n$  次多項式からなる空間  $\{p(x) \mid p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, a_j \in \mathbb{C}\}$  を考える。もし、 $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  と  $q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$  に対して、内積を

$$\langle p(x) \mid q(x) \rangle \equiv \sum_{k=0}^n a_k^* b_k$$

と定めれば、この多項式空間からなる内積空間は  $\mathbb{C}^{n+1}$  と同一視できる。この例からもわかるように、与えられた空間にどのような内積を導入するかに応じて内積空間のありかたは各様である。

内積が定義されたベクトル空間を内積空間 (inner product space) または前 Hilbert 空間 (pre Hilbert space) という。

**注意 1.8** 内積の共役対称性と線形性を使うと

$$\langle cv \mid w \rangle = \langle w \mid cv \rangle^* = c^* \langle w \mid v \rangle^* = c^* \langle v \mid w \rangle$$

**定義 1.9** (ノルム) 内積空間  $V$  において  $v \in V$  のノルム (norm) を次で定義する

$$\|v\| = \sqrt{\langle v \mid v \rangle} \tag{1.2}$$

このようにノルムが内積から誘導されている場合には、ケット  $|\cdot\rangle$  内は 2 乗可積分関数 ( $L^2$  関数) あるいは 2 乗総和可能列 ( $\ell^2$  列) であると考えられる。このために、このような関数 (列) のノルムを  $\|\cdot\|_2$  と記すことがある。

**注意 1.10** ここでは都合上、内積からノルムを定義したが、実は先にノルムが与えられていれば、内積を次のようにして定めることもできる。

**定理 1.11** 内積空間を  $V$ 、 $x, y \in V$  (複素空間) としたとき、そのノルムから内積が次のように定まる (左辺を右辺で定義する):

$$\langle x \mid y \rangle = \frac{1}{4} \|x + y\|^2 - \frac{1}{4} \|x - y\|^2 + \frac{i}{4} \|x + iy\|^2 - \frac{i}{4} \|x - iy\|^2$$

<sup>\*1</sup> 内積をブラとケットで表してブラケット (bracket) とシャレているのである。

注意 1.12 内積の正值性より、 $\|v - w\| = 0$  は  $v = w$  を意味する。これより、ある無限列  $\{v_k\}$  と  $v$  について

$$\text{もし } \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - v\| = 0 \text{ なら } \lim_{k \rightarrow \infty} v_k = v.$$

というように収束性を議論することができる。

演習 1.13 Mathematica を使って、等しい長さのベクトルの内積  $\langle x | y \rangle$  を計算して、内積の性質を検討してみなさい。たとえば、 $x = (1 + i2, 2 + i4, 3 + i6)^t$ ,  $y = (8 + i4, 6 + i3, 4 + i2)^t$  とする。

ヒント：

```
x = Table[i + I 2 i, {i, 1, 3}]
y = Table[2 i + I i, {i, 4, 2, -1}]
x.y
80 I
y.x
80 I
Conjugate[x].y
64 - 48 I
x.Conjugate[y]
64 + 48 I
```

数学では列ベクトルを  $x$  としたとき、その行ベクトルを  $x^t$  で与えて区別するが、Mathematica ではこれらの区別はなく、それゆえに `Transpose[ ]` や `ConjugateTranspose[ ]` はベクトル（リスト）には適用できない。これらの関数は行列（リストのリスト）以上の構造を持つときに限って適用できることに注意しよう。上の場合、`x.y` でも `y.x` でも同じ値が返る。しかし、これでは内積の共役対称性を満たさない。定義 1.1 にしたがうと、複素ベクトルの場合には  $\langle x | y \rangle$  を `Conjugate[x].y` とするのが正しい内積の計算法であることがわかる。

### 1.1.2 $L^2$ と $\ell^2$ 空間

ノルムは 2 点間を測る「距離」の一種と考えることができる。Fourier 解析や Wavelet 解析では、与えられた関数に対してある関数列を構成して、その関数列の収束性や近似の度合いを考察の対象とすることが多い。

また、関数  $f$  の変数としてしばしば  $x$  や  $t$  を使うが、ここでは一貫した変数表記をしない。 $f$  を信号 (signal) と見なして、位置  $x$  の信号値  $f(x)$  や、時刻  $t$  の信号値  $f(t)$  を考える場合があるからだ。ただし、時刻  $t$  はもっぱら  $\mathbb{R}$  上で考えるが、位置  $x$  はある多次元領域で考えるのが実際である（そのとき  $f$  は多変数関数と見なして取り扱わねばならない）。このテキストでは特に断らないかぎり当面は 1 変数関数を扱う。

区間  $[a, b]$  上の関数全体  $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$  を考えよう。



定義 1.14 区間  $[a, b]$  で 2 乗可積分な関数全体を  $L^2[a, b]$  と定義する :

$$L^2[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_a^b |f(t)|^2 dt < +\infty \right\} \quad (1.3)$$

値  $f(t)$  の絶対値を振幅 (amplitude) とよび、 $|f(t)|^2$  をエネルギーということがある (節 2.2 (30 ページ))。  $L^2[a, b]$  は区間  $[a, b]$  にわたる全エネルギーが有限な関数の集合だということができる。

注意 1.15  $L^2$  は (Lebesgue 積分の意味で) 不連続関数を含む「大きな」空間である。実際、 $L^2[a, b]$  は無限次元空間である。

定義 1.16 (関数族の線形独立 (1 次独立)) ある定義域上の有限個の関数族  $\{f_i(t)\}_{i=1}^n$  が線形独立とは、定数  $\{c_i\}_{i=1}^n$ ,  $c_i \in \mathbb{C}$  として  $\sum_{i=1}^n c_i f_i(t) = 0$  となるのが  $c_1 = \dots = c_n = 0$  のときに限るときである。無限個の関数族  $\{f_i(t)\}_{i=1}^\infty$  が線形独立とは、どのような有限関数族をとってもそれが線形独立なときをいう。

定義 1.17 (無限次元) 線形空間において、ある自然数  $N$  に対して、 $N$  個の線形独立な要素は存在するが、 $N + 1$  個の要素はいつも線形従属になるとき、その空間の次元は  $N$  次元である。一方、そのような  $N$  が存在せずに、任意の自然数  $n$  に対して、いつも  $n$  個の要素からなる線形独立な組が存在するとき、その空間は無限次元という。

例 1.18 線形独立な無限個の関数の空間  $\text{span}\{1, t, t^2, t^3, \dots\}$  は  $L^2[0, 1]$  に属する多項式空間は無限次元である。ただし、 $1/t \notin L^2[0, 1]$  である。 $\int_0^1 (1/t)^2 dt = -\left[\frac{1}{t}\right]_0^1 = +\infty$  となって 2 乗可積分ではないためだ。

定義 1.19 ( $L^2$  内積)  $f, g \in L^2[a, b]$  に対して、 $L^2$  内積  $\langle f | g \rangle_{L^2}$  を次で定義する :

$$\langle f | g \rangle_{L^2} = \int_a^b f(t)^* g(t) dt. \quad (1.4)$$

注意 1.20  $\langle f | g \rangle_{L^2}$  は内積の性質 1.2 を満たす。ただし、 $0 = \langle f | f \rangle_{L^2}$  であるとき、 $\forall t \in [a, b]$  に対して  $f(t) = 0$  であるとは限らないことに注意しよう。 $f$  が連続であれば区間上で恒等的にゼロであるが、測度ゼロの (不連続点の) 集合を除いて  $f$  はゼロであるとは言いえない。

$f$  と  $g$  が区間  $[a, b]$  上で  $L^2$  の意味で同等であるとは、区間  $[a, b]$  から測度ゼロ集合を除いた集合について  $f(t) = g(t)$  であるということである。

注意 1.21 関数  $f$  とそのケット  $|f\rangle$  とは厳密に言えば同じものではない。しかしながら、定理 1.52 でみるように、ケット  $|f\rangle$  は関数  $f$  を (関数空間の直交基底と  $f$  との内積を成分とする) ベクトルとして取り扱うことができる。したがって、(1.4) のようにブラケット表記した内積によって関数  $f$  の成分が自然に計算できるという意味で  $f$  と  $|f\rangle$  とを同一視することができる (慎重に進めたければ、内積の定義に戻って計算すれば混乱はないはずだ)。したがって、このテキストではしばしば関数  $f$  をケット内にいれて  $|f\rangle$  として使う。こうした  $f$  と  $|f\rangle$  との混用の「正当性」は「保証」されているので、これから先、ブラケット記法をご都合主義的に使うことにする。特に内積の性質を利用する計算では首尾一貫した簡素で美しい表示を得ることができる。

**定義 1.22** ( $\ell^2$  空間) 無限個の成分を含むベクトルを両側無限離散列とみなして  $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$  の全エネルギーが有限であるような (2 乗総和可能な) 離散列の集合を  $\ell^2$  と定義する :

$$\ell^2 = \left\{ x \mid \sum_{i=-\infty}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty, x_i \in \mathbb{C} \right\}. \quad (1.5)$$

**定義 1.23** ( $\ell^2$  内積)  $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots), y = (\dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots) \in \ell^2$  について、 $\ell^2$  内積  $\langle x | y \rangle_{\ell^2}$  を次で定義する :

$$\langle x | y \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^* y_n. \quad (1.6)$$

以降、文脈から明らかな場合は内積を  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  のように内積の取り方を省略して表すことがある。

**定義 1.24** (Hilbert 空間) 実または複素内積空間で、内積によって誘導されるノルム ( $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot | \cdot \rangle}$ ) に関して完備距離空間をなすとき Hilbert 空間という。

**例 1.25**  $L^2$  空間や  $\ell^2$  空間は Hilbert 空間である。

### 1.1.3 内積の不等式

**定理 1.26** (Schwartz の不等式) 内積空間  $V$  において、 $x, y \in V$  に対して

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad (1.7)$$

ここで、等号は  $x$  と  $y$  が線形従属のときに成立し、そのときは  $\langle x | y \rangle = \|x\| \cdot \|y\|$  である。

**証明**  $\langle x | y \rangle = |\langle x | y \rangle| e^{i\phi}$  とする。

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|e^{-i\phi} x - ty\|^2 = \langle e^{-i\phi} x - ty | e^{-i\phi} x - ty \rangle \\ &= \|x\|^2 - t \left( \langle e^{-i\phi} x | y \rangle + \langle y | e^{-i\phi} x \rangle \right) + t^2 \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - t \left( \langle e^{-i\phi} x | y \rangle + \langle e^{-i\phi} x | y \rangle^* \right) + t^2 \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2t \operatorname{Re} \left( \langle e^{-i\phi} x | y \rangle \right) + t^2 \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2t |\langle x | y \rangle| + t^2 \|y\|^2 \end{aligned}$$

上式右辺は  $t$  についての非負 2 次方程式であるので、相異なる 2 実根をもたないための判別式条件

$$D = 4 |\langle x, y \rangle|^2 - 4 \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0$$

から、結果を得る。 ■

定理 1.27 (三角不等式) 内積空間  $V$  において、 $x, y \in V$  に対して

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad (1.8)$$

ここで、等号は  $x$  と  $y$  が互いに他の非負倍数、つまり  $x = ay$  ( $a > 0$ ) のときに成立。

証明 途中で、Schwartz の不等式を使う。

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y | x + y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x | y \rangle) + \|y\|^2 \\ &\text{Schwartz の不等式より} \\ &\leq \|x\| + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

もし  $\langle x | y \rangle = \|x\| \cdot \|y\|$  のときは、線形従属の場合である。 ■

## 1.2 関数の $L^2$ 収束と一様収束

関数列  $\{f_n\}$  の関数  $f$  への収束について考えよう。関数列の収束には、各点収束、一様収束、 $L^2$  収束などの概念がある。

定義 1.28 (各点収束) 関数列  $\{f_n\}$  が関数  $f$  に区間  $[a, b]$  で各点収束 (pointwise convergence) するとは、各  $t \in [a, b]$  について、 $\forall \varepsilon > 0$  に対して、ある整数  $N = N(\varepsilon, t)$  が存在して、全ての  $n \geq N$  について

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

が成立するときである。 $N$  は  $\varepsilon$  と  $t$  に依存して決まっていることに注意しよう。各  $t$  を固定すると、十分大きな  $n \geq N$  について  $f_n(t)$  は  $f(t)$  に近くなるのである。

定義 1.29 (一様収束) 関数列  $\{f_n\}$  が関数  $f$  に区間  $[a, b]$  で一様収束 (uniform convergence) するとは、 $\forall \varepsilon > 0$  に対し、どんな  $t \in [a, b]$  についてもある整数  $N = N(\varepsilon)$  が存在して、全ての  $n \geq N$  について

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

が成立するときである。 $N$  は  $\varepsilon$  だけに依存して決まることに注意。十分大きな  $n \geq N$  について区間  $[a, b]$  のどこでも  $f_n(t)$  は  $f(t)$  に近くなるのである。

定義 1.30 ( $L^2$  収束) 関数列  $\{f_n\}$  が関数  $f$  に  $L^2[a, b]$  収束するとは、 $\forall \varepsilon > 0$  に対して、ある整数  $N = N(\varepsilon)$  が存在して、全ての  $n \geq N$  について

$$\|f_n(t) - f(t)\|_{L^2} < \varepsilon$$

が成立するときである。十分大きな  $n \geq N$  について、区間  $[a, b]$  内の幾つかの  $t$  について  $f_n(t)$  と  $f(t)$  が遠く離れていてもよいことに注意する。 $L^2$  収束を平均収束 (convergence in mean) ということがある。

注意 1.31 定義から明らかなことであるが

$$\begin{array}{ccc} \text{一様収束} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{OK}} \\ \xleftarrow{\text{ダメ}} \end{array} & \text{各点収束} \end{array}$$

に注意する。

また、各点収束は必ずしも  $L^2$  収束をもたらしえない。関数列が、 $L^2$  のある関数で一様に押さえられる（つまり有界な）ときには各点収束は  $L^2$  収束する。

例 1.32 関数列  $\{f_n(t) = t^n\}_{n=1,2,\dots}$  は  $f(t) = 0$  に区間  $[0, 1)$  で各点収束する：

$$0 \leq \forall t < 1 \text{ について } t^n \longrightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

しかし、 $\{t^n\}$  は区間  $[0, 1)$  では一様収束しない。実際、 $t$  が 1 に近いと  $t^n$  の現象に仕方は遅くなり、たとえば  $\varepsilon = 0.001$  としたときに  $|t^n| < \varepsilon$  となるには、 $t = 0.5$  では  $n \geq 10$ 、 $t = 0.9$  では  $n \geq 66$  であり、 $\varepsilon$  と  $t$  に依存して  $N(\varepsilon, t)$  が定まるからである。ただし、ある  $r < 1$  を取って区間  $[0, r]$  とすると、 $\{t^n\}$  は区間  $[0, r]$  で 0 に一様収束する。実際、 $r^N > \varepsilon > 0$  として  $\varepsilon$  を選んでおけば、 $n \geq N$  について  $[0, r]$  上の全ての点で  $|f_n(t)| < \varepsilon$  であるからだ。

一方、 $\{t^n\}$  は区間  $[0, 1]$  で  $L^2$  収束する。実際、

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_0^1 (t^n)^2 dt = \frac{1}{2n+1} \longrightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

定理 1.33 関数列  $\{f_n\}$  が区間  $[a, b]$  で関数  $f$  に一様収束すれば、 $\{f_n\}$  は関数  $f$  に  $L^2[a, b]$  収束する。しかし逆は成立せず、 $\{f_n\}$  が関数  $f$  に  $L^2[a, b]$  収束しても一様収束するとは限らない。

証明 一様収束性から、どんな  $t \in [a, b]$  についても、 $\forall \varepsilon > 0$  に対して、ある整数  $N = N(\varepsilon)$  が存在して、すべての  $n \geq N$  について  $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$  が成立する。

$$\|f_n - f\|_{L^2}^2 = \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt \leq \int_a^b \varepsilon^2 dt = \varepsilon^2(b-a)$$

より、 $\{f_n\}$  は関数  $f$  に  $L^2[a, b]$  収束することが示せた。

逆が成立しない例として、 $[0, 1]$  上の関数列  $\{f_n\}$  を次のように定める。

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$\{f_n\}$  は  $[0, 1]$  上の関数  $f(t) = 0$  に  $L^2$  収束する。実際、

$$\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|^2 dt = \int_0^{\frac{1}{n}} dt = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

しかし、どんな  $t \in [a, b]$  についても、 $1 > \forall \varepsilon > 0$  に対しても、すべての  $n \geq N$  について

$$|f_n(t) - 0| < \varepsilon$$

であるように、整数  $N$  をみつかることはできない（すべての  $n$  で  $|f_n(t) - 0| = 1$  であるため）一様収束しない。 ■

### 1.3 直交系と直交射影

ここではブラケット表記を積極的に使う。関数の場合でも  $f$  と  $|f\rangle$  を同一視して、誤解のない範囲で混用する。

#### 1.3.1 直交系

**定義 1.34** 空間  $V$  内の組  $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_N\rangle\}$  があって、任意の  $w \in V$  がその線形結合

$$|w\rangle = \sum_{i=1}^N c_i |v_i\rangle.$$

によって一意に表されるとき、 $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_N\rangle\}$  を  $V$  の基底 (basis) いう。このとき、基底の組は空間  $V$  を張るといい、 $V = \text{span}\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_N\rangle\}$  と表す。

この定義は、基底の数  $N$  は無限個つまり空間  $V$  が無限次元の場合も含んでいる。

**定義 1.35** 内積空間  $V$  において

- (1)  $x, y \in V$  が直交 (orthogonal) しているとは、 $\langle x | y \rangle = 0$  のときである。
- (2)  $V$  のベクトル集合  $\{e_i\}_{i=1}^N$  が正規直交系 (orthonormal) であるとは、 $\|e_i\| = 1$  かつ  $i \neq j$  について  $\langle e_i | e_j \rangle = 0$  のときである。
- (3)  $V$  の部分空間  $V_1$  と  $V_2$  が直交している  $V_1 \perp V_2$  とは、各  $x \in V_1$  と  $\forall y \in V_2$  について  $\langle x | y \rangle = 0$  であるときをいう。

**注意 1.36** 空間  $V$  の基底が与えられていれば、定理 1.63 (Gram-Schmidt の直交化法) によって、正規直交基底を構成することができる。基底として正規直交基底を採用すると、次の定理 1.37 のように、何かと都合がよい。

**定理 1.37** 内積空間  $V$  の部分空間  $V_0 \subseteq V$  の正規直交基底を  $\{|e_1^0\rangle, |e_2^0\rangle, \dots, |e_N^0\rangle\}$  とする。このとき、任意の  $|v\rangle \in V_0$  は

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^N \langle e_i^0 | v \rangle |e_i^0\rangle = \sum_{i=1}^n |e_i^0\rangle \langle e_i^0 | v \rangle \quad (1.9)$$

と表される。

**証明**  $\{|e_1^0\rangle, |e_2^0\rangle, \dots, |e_N^0\rangle\}$  が  $V_0$  の基底であることから、 $\forall v \in V_0$  は基底の線形結合によって一意に表される：

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^N v_i |e_i^0\rangle.$$

係数  $v_k$  を求めるためには、 $v$  と  $e_k$  の内積をとって基底の直交性を用いればよい。

$$\langle e_k^0 | v \rangle = \sum_{i=1}^N v_i \langle e_k^0 | e_i^0 \rangle = \sum_{i=1}^N v_i \delta_{ik} = v_k.$$

■

例 1.38  $\frac{x}{2} = -y = \frac{z}{3}$  の関係にあるベクトル  $(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$  は  $(2, -1, 3)^t$  方向を向き、平面  $\{(x, y, z) | 2x - y + 3z = 0\}$  に直交している。

例 1.39  $L^2([0, 1])$  の 2 つの関数  $f, g$

$$f(t) = \begin{cases} \text{非零} & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}, \quad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{それ以外} \\ \text{非零} & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$

は直交している ( $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt = 0$ )

例 1.40 次の  $\mathbb{R}$  上で定義される 2 つの関数  $\phi$  と  $\psi$

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}, \quad (1.10)$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (1.11)$$

は正規直交している ( $\|\phi\| = \|\psi\| = 1$  で、 $\langle \phi | \psi \rangle = 0$  である)。  $\phi$  を Haar のスケーリング関数、 $\psi$  を Haar のウェーブレット関数という。

演習 1.41 Haar のスケーリング関数  $\phi$  と Haar のウェーブレット関数  $\psi$  のグラフを描いてみなさい。また 2 つの関数  $\phi, \psi$  からなる関数系  $\{|\phi\rangle, |\psi\rangle\}$  は正規直交系であることを示しなさい。また、この事実を Mathematical でのプログラムで確かめてみなさい。

ヒント：Mathematical では、 $\phi$  および  $\psi$  を次のように定義する。

```
haarScaling[t_] := If[t < 0 || 1 <= t, 0, 1]
haarWavelet[t_] :=
Piecewise[{{1, 0 <= t && t < 1/2}, {-1, 1/2 <= t && t < 1}}, 0]
```

これより、全区間  $[-\infty, \infty]$  にわたる内積は、 $\phi(t), \psi(t)$  については  $[0, 1]$  での積分となり、次のように計算できる。

```
Integrate[haarScaling[t] haarWavelet[t], {t, 0, 1}]
Integrate[haarScaling[t]^2, {t, 0, 1}]
Integrate[haarWavelet[t]^2, {t, 0, 1}]
```

演習 1.42 区間  $[n, n+1)$  で値 1 それ以外の区間では値 0 となる  $\mathbb{R}$  上の関数は区間  $I$  の特性関数  $\chi_I$  を使って  $\chi_{[n, n+1)}(x)$  と表されるが、これは Haar のスケーリング関数  $\phi(x)$  を使って

$$\chi_{[n, n+1)}(x) = \phi(x - n)$$

とも表される。関数系  $\text{span}\{\phi(x-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  は  $\mathbb{R}$  で正規直交系をなすことを示しなさい。

いま、関数  $f(x) = \chi_{[1/2, 5/2]}$  としたとき、この正規直交系を使って  $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_n \phi(x-k)$  のように展開できるかを検討しなさい。任意の関数が正規直交基底を使って展開できる条件とはなんだろうか。

例 1.43 例 1.18 でみた単項式系  $\text{span}\{1, t, t^2, t^3, \dots\}$  を考えよう。区間  $[a, b]$  で連続な関数を求める精度で一様に多項式を使って近似することができる (Weistrass の近似定理)。つまり、多項式全体は  $[a, b]$  上の連続関数の空間で稠密である。しかし、これらは互いに直交していない (非負の  $i \neq j$  について  $\langle t^i | t^j \rangle = \int_0^1 t^i \cdot t^j dt = \frac{1}{i+j+1}$ )

例 1.44  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx \right\}_{n=1,2,\dots}$  は区間  $[0, \pi]$  上で正規直交系であることが確かめられる。この事実から、Weistrass の近似定理を使うと、 $[0, \pi]$  で連続な関数  $f$  はこの関数系を基底として展開可能であることを次のようにして示すことができる。任意の  $f$  に対して、

$$v(x) = f(\cos^{-1} x) \quad \text{すなわち} \quad v(\cos t) = f(t)$$

で定義される関数  $v$  は区間  $[-1, 1]$  で連続。したがって、Weistrass の近似定理より  $v(x)$  は  $x$  の多項式で必要な精度で一様に近似可能である。このことは  $f(t)$  が  $\cos t$  の多項式で必要な精度で一様に近似できることを示している。ところで

$$\cos^n t = \frac{1}{2^{n-1}} \left[ \cos nt + \binom{n}{1} \cos(n-2)t + \binom{n}{2} \cos(n-4)t + \dots \right]$$

に注意すれば、 $\cos t$  の  $n$  次多項式は  $1, \cos t, \dots, \cos nt$  の一次結合で表されることから、主張は証明された。

例 1.45 関数系  $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \right\}_{n=1,2,\dots}$  は区間  $[0, \pi]$  上で正規直交系である。区間  $[0, \pi]$  で連続であって  $f(0) = f(\pi) = 0$  の条件を満たす関数  $f$  はこれらの一次結合として必要な精度で一様に近似できることができる。この関数系はすべて  $x = 0, \pi$  で 0 となることから、条件  $f(0) = f(\pi) = 0$  を落とすことができず、区間  $[0, \pi]$  上の任意の連続関数を展開することはできない。

演習 1.46

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t dt = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt = \pi$$

から、2 組  $\left\{ \left\langle \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}} \right\rangle, \left\langle \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \right\}$  は  $L^2([-\pi, \pi])$  で正規直交系であることが確かめられる。一般に、 $\left\{ \left\langle \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} \right\rangle, \left\langle \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \right\}_{n=1,2,\dots}$  が  $L^2([-\pi, \pi])$  で正規直交系であることを示しなさい。

演習 1.47 単位円領域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  上の 2 乗可積分な関数空間

$$L^2(D) = \left\{ f : D \rightarrow \mathbb{C} \mid \iint_D |f(x, y)|^2 dx dy < +\infty \right\}$$

を考える。  $L^2(D)$  上の内積を次で定義する：

$$\langle f | g \rangle := \iint_D f(x, y) \cdot \overline{g(x, y)} dx dy.$$

関数族  $\{z_n(x, y) = (x + iy)^n\}_{n=0,1,2,\dots}$  が  $L^2(D)$  で直交していることを示しなさい (極座標系を使う)。この関数族から正規直交系を構成しなさい。

### 1.3.2 直交射影

定義 1.48 内積空間  $V$  の有限閉部分空間を  $V_0$  とする。  $|u\rangle$  を  $V$  の任意の要素としたとき、次の性質を持つ  $|v_0\rangle$  を  $|u\rangle$  の  $V_0$  への直交射影 (orthogonal projection) あるいは正射影といい、  $P_{V_0} |u\rangle$  で表す。

$$|u\rangle \in V \quad \text{かつ} \quad |u\rangle - |v_0\rangle \perp V_0 \quad (1.12)$$

すなわち、  $|v_0\rangle = P_{V_0} |u\rangle$  であるとは

$$|u\rangle = |v_0\rangle + |w\rangle \quad (|v_0\rangle \in V_0, \quad |w\rangle \perp V_0) \quad (1.13)$$

が成り立つことである。

$|u\rangle \in V$  と閉部分空間  $V_0$  が与えられると、射影  $P_{V_0} |u\rangle$  は一意に定まる。実際、

$$|u\rangle = |v_{01}\rangle + |w_1\rangle = |v_{02}\rangle + |w_2\rangle \quad |v_{0i}\rangle \in V_0, \quad |w_i\rangle \perp V_0, \quad (i = 1, 2)$$

とすれば、  $|v_{01}\rangle - |v_{02}\rangle = |w_2\rangle - |w_1\rangle$ 。この両辺と  $\langle v_{01} - v_{02} |$  との内積をとると  $\|v_{01} - v_{02}\|^2 = \langle v_{01} - v_{02} | w_2 - w_1 \rangle = 0$ 。したがって、  $|v_{01}\rangle = |v_{02}\rangle$  であり  $|w_1\rangle = |w_2\rangle$  を得る。

定理 1.49 内積空間  $V$  の有限部分空間  $V_0$  の正規直交基底を  $\{|e_1^0\rangle, \dots, |e_N^0\rangle\}$  とする。このとき、任意の  $|u\rangle \in V$  に対して

$$|v_0\rangle = \sum_{j=1}^N \langle e_j^0 | u \rangle |e_j^0\rangle = \sum_{j=1}^N |e_j^0\rangle \langle e_j^0 | u \rangle$$

と置くと、  $|v_0\rangle = P_{V_0} |u\rangle$  である。ここで、射影演算子  $P_{V_0}$  は

$$P_0 = \sum_{j=1}^N |e_j^0\rangle \langle e_j^0| \quad (1.14)$$

である。

証明 部分空間  $V_0$  は有限次元であるので閉部分空間である。  $v_0 \in V_0$  は明らか。

$$\begin{aligned} \langle u - v_0 | e_k^0 \rangle &= \langle u | e_k^0 \rangle - \langle v_0 | e_k^0 \rangle = \langle u | e_k^0 \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^N \langle u | e_j^0 \rangle \langle e_j^0 | e_k^0 \right\rangle \\ &= \langle u | e_k^0 \rangle - \langle u | e_k^0 \rangle = 0 \quad (k = 1, \dots, N) \end{aligned}$$

よって、  $(u - v_0) \perp V_0$ . ■



系 1.50 任意の射影演算子  $P = \sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i|$  は次の性質をもつ：

$$P^2 = P.$$

証明

$$\begin{aligned} P^2 &= \left( \sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i| \right) \left( \sum_{k=1}^n |e_k\rangle \langle e_k| \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |e_i\rangle \langle e_i| e_k\rangle \langle e_k| \\ &\quad \langle e_i| e_k\rangle = \delta_{ik} \text{ を使って} \\ &= \sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i| = P \end{aligned}$$

■

(1.9) の両辺を眺めると、改めて定理 1.37 は次のように表される (Dirac のブラケット表記で初めて可能となった表式である)。

定理 1.51 空間  $V$  の閉部分空間  $V_0$  を張る正規直交基底系  $\{|e_k^0\rangle\}_{k=1}^N$  ( $N$  は無限でもよい) について、演算子  $|e_k^0\rangle \langle e_k^0|$  の総和

$$P_{V_0} = \sum_{k=1}^N |e_k^0\rangle \langle e_k^0| \tag{1.15}$$

は、 $V$  から  $V_0$  への射影作用素  $P_{V_0} : V \rightarrow V_0$  である。たとえば、 $V$  空間に属する任意のケット  $|f\rangle$  の  $V_0$  への直交射影は、 $|f\rangle = P_{V_0} |f\rangle$  から直ちに

$$|f\rangle = \sum_{k=1}^N |e_k^0\rangle \langle e_k^0| f\rangle$$

と、係数  $\{\langle e_k^0| f\rangle\}$  を持つ直交基底  $\{|e_k^0\rangle\}$  によって展開されることが自明となる (ケット  $|f\rangle$  のベクトル成分  $(\langle e_1^0| f\rangle, \dots, \langle e_N^0| f\rangle)^t$  を計算することに相当する)。

次の定理は、Hilbert 空間において閉部分空間への直交射影の存在を保証する基本定理である。

定理 1.52 (射影定理)  $V_0$  を Hilbert 空間  $V$  の閉部分空間次元部分空間、 $|u\rangle$  を  $V$  の任意の要素とする。このとき、 $|u\rangle$  の  $V_0$  への正射影  $|v_0\rangle = P_{V_0} |u\rangle$  が一意に存在し、 $|u\rangle$  は

$$|u\rangle = |v_0\rangle + |w\rangle \quad (|v_0\rangle \in V_0, \quad |w\rangle \in V_0^\perp)$$

の形に一意に表される。

証明

一意性は既に考えたので、 $P_{V_0} |u\rangle$  の存在を示せばよい。 $|u\rangle$  から  $V_0$  への最短距離

$$\delta = \inf_{|v\rangle \in V_0} \|u - v\|$$

を考えよう。inf の定義から、 $V_0$  内に

$$u_n \in V_0, \quad \|u - v_n\| \rightarrow \delta \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるような列  $\{|v_n\rangle\}$  が存在する。 $\{|v_n\rangle\}$  が収束すれば、その極限  $|v_0\rangle$  が求める  $P_{V_0} |u\rangle$  であることを示そう。

$|v_n\rangle \in V_0$  で、 $V_0$  は閉であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |v_n\rangle \in V_0$ 。このとき、 $\|u - v_n\| \rightarrow \|u - v_0\| = \delta$  であるので

$$\|u - v_0\| = \min_{|v\rangle \in V_0} \|u - v\|$$

である。ここで、 $|w\rangle$  を  $V_0$  の任意の要素、 $t$  を実数として、 $u$  と  $|v_0 + tw\rangle \in V_0$  との差のノルムの 2 乗  $f(t) = \|u - (v_0 + tw)\|^2$  を考えてみる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \|u - v_0 - tw\|^2 \\ &= \|u - v_0\|^2 - 2t \operatorname{Re}(\langle u - v_0 | w \rangle) + t^2 \|w\|^2 \end{aligned}$$

となり、 $|v_0\rangle$  が  $|u\rangle$  に最近接であるならば  $t = 0$  で  $f(t)$  は最小値となり、 $f'(0) = 0$  より  $\operatorname{Re}(\langle u - v_0 | w \rangle)$  であることから、

$$\langle u - v_0 | w \rangle = 0 \quad (|w\rangle \in V_0)$$

が導かれ、 $|u - v_0\rangle$  は任意の  $|w\rangle \in V_0$  に直交していることがわかった。したがって、 $|v_0\rangle = P_{V_0} |u\rangle$  である。

最後に、 $\{|v_n\rangle\}$  の収束性を示すために、 $\{|v_n\rangle\}$  が Cauchy 列であることを導こう。中線定理から

$$\|(u - v_n) + (u - v_m)\|^2 + \|v_m - v_n\|^2 = 2\|u - v_n\|^2 + 2\|u - v_m\|^2$$

に注意すると

$$4 \left\| u - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 + \|v_m - v_n\|^2 = 2\|u - v_n\|^2 + 2\|u - v_m\|^2.$$

$(|v_n\rangle + |v_m\rangle)/2 \in V_0$  から、 $\left\| u - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 \geq \delta^2$  を使って

$$\|v_m - v_n\|^2 \leq 2\|u - v_n\|^2 + 2\|u - v_m\|^2 - 4\delta^2$$

を得る。右辺は  $n, m \rightarrow \infty$  で  $2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$  に収束し、 $\|v_n - v_m\| \rightarrow 0$  ( $n, m \rightarrow \infty$ ) がわかった。

■

例 1.53  $L^2([-\pi, \pi])$  において、その部分空間  $V_0$  が  $\left\{ |e_1^0\rangle = \left| \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}} \right\rangle, |e_2^0\rangle = \left| \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \right\}$  で張られているとする。 $|f(t)\rangle = |t\rangle$  の  $V_0$  への射影  $|f_0(t)\rangle$  は、定理 1.51 より

$$|f_0(t)\rangle = \langle e_1^0 | f \rangle |e_1\rangle + \langle e_2^0 | f \rangle |e_2\rangle$$

で与えられる。第 1 項の係数は、区間  $[-\pi, \pi]$  にわたり被積分関数が奇関数であるために直ちに 0。第 2 項の係数は、 $\langle e_2^0 | f \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt = 2\sqrt{\pi}$  より

$$|f_0(t)\rangle = 2|\sin t\rangle.$$

ここではあえて関数とケットを混用して表記したが、ケットを取り去って考えてもよい。以下の例でも、自在に関数とケットを混用してもよい。

演習 1.54 Mathematica を使って、例 1.53 の結果を確かめなさい。

(ヒント)

```
e1[t_] := Cos[t]/Sqrt[Pi];
e2[t_] := Sin[t]/Sqrt[Pi];
ip[p1_, p2_] := Integrate[p1 p2, {t, -Pi, Pi}] (* 変数 t に関する関数 p1 と p2 の内積 *)
Projection[t, e1[t], ip]
Projection[t, e2[t], ip]
```

例 1.55 (1.10) の Haar scaling 関数  $\phi(t)$  と (1.11) の Haar wavelet 関数  $\psi(t)$  で張られる  $L^2[0, 1]$  の部分空間を  $V_1 = \text{span}\{|\phi\rangle, |\psi\rangle\}$  とする。関数  $f(t) = t$  とするとき、

$$\langle \phi | f \rangle = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}, \quad \langle \psi | f \rangle = \int_0^{1/2} t dt - \int_{1/2}^1 t dt = -\frac{1}{4}$$

に注意すると、 $f$  の  $V_1$  への直行射影  $f_1(t)$  は

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \langle \phi | f \rangle |\phi\rangle + \langle \psi | f \rangle |\psi\rangle = \phi(t)/2 - \psi(t)/4 \\ &= \begin{cases} 1/4 & 0 \leq t < 1/2 \\ 3/4 & 1/2 \leq t < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

で与えられる。

演習 1.56 演習 1.46 から、 $V_n = \text{span} \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle, \left| \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} \right\rangle, \left| \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \right\}_{k=1, \dots, n}$  は  $L^2([-\pi, \pi])$  の部分空間である。関数  $f(t) = t^2$  の  $n = 1, 2, 3$  で定まる空間  $V_1, V_2$  および  $V_3$  への直交射影を計算しなさい。 $V_\infty$  を張る基底は、完全正規直交系である。

演習 1.57 Mathematica を使って、例 1.56 の関数  $f(t) = t^2$  を空間  $V_1, V_2$  および  $V_3$  へ直交射影して得られる関数のグラフを描きなさい。

(ヒント) Mathematica では、演習 1.54 で見たように、内積関数をたとえば ip として別に定義しておく、関数  $f$  の関数  $g$  による射影  $\langle g(t) | f(t) \rangle |g(t)\rangle$  を `Projection[f[t], g[t], ip]` で計算できる (Mathematica ヘルプの Projection 参照)。

図 1.1 は、関数  $f(t) = t^2$  を  $L^2([-π, π])$  の部分空間  $V_3$  へ直交射影して得られる関数  $\pi^2/3 - 4 \cos t + \cos 2t - 4/9 \cos 3t$  のグラフである。( $[-π, π]$  の範囲では元の関数  $t^2$  を近似しているといえないだろうか ( $V_1, V_2$  への射影結果と比較してみよう)。

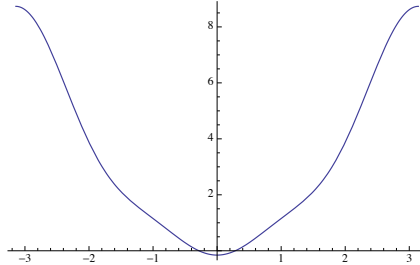


図 1.1  $V_{n=3}$  で張られる部分空間へ関数  $f(t) = t^2$  を直交射影して得られた関数のグラフ。  $n$  が大きくなるほど、元の関数  $f(t)$  をよく近似する様子が伺える。

```
base[t, n_] :=
  Flatten[{1/Sqrt[2 Pi],
    Table[{Cos[k t]/Sqrt[Pi], Sin[k t]/Sqrt[Pi]}, {k, 1, n}]}] (*基底関数系*)
ip[p1_, p2_] := Integrate[p1 p2, {t, -Pi, Pi}] (*内積関数*)
f[t] = t; (*元の関数 t*)
pf1[t_] =
  Sum[Projection[f[t], base[t, 1][[i]], ip], {i, 1, Length[base[t, 1]]}] (*n=1の射影関数*)
Plot[pf1[t], {t, -Pi, Pi}] (*射影関数のプロット*)
pf2[t_] =
  Sum[Projection[f[t], base[t, 2][[i]], ip], {i, 1, Length[base[t, 2]]}] (*n=2の射影関数*)
Plot[pf2[t], {t, -Pi, Pi}] (*射影関数のプロット*)
pf3[t_] =
  Sum[Projection[f[t], base[t, 3][[i]], ip], {i, 1, Length[base[t, 3]]}] (*n=3の射影関数*)
Plot[pf3[t], {t, -Pi, Pi}] (*射影関数のプロット*)
f2[t] = t^2; (*元の関数 t^2*)
pf23[t_] =
  Sum[Projection[f2[t], base[t, 3][[i]], ip], {i, 1, Length[base[t, 3]]}] (*n=3の射影関数*)
Plot[pf23[t], {t, -Pi, Pi}]
```

演習 1.58 例 1.40 の Haar の scaling 関数  $\phi(t)$  と Haar の wavelet 関数  $\psi(t)$  で次のように張られる  $L^2([0, 1])$  の部分空間  $\text{span}\{|\phi(t)\rangle, |\psi(t)\rangle, |\psi(2t)\rangle, |\psi(2t-1)\rangle, |\psi(2t+1)\rangle\}$  に対して、関数  $f(t) = t$  を直行射影しなさい。

演習 1.59 Mathematica を使って、例 1.58 で直交射影して得られる関数のグラフを描いてみなさい。  
(ヒント) 先の例 1.56 の ip ように、内積関数 iph を別に定義しておく。

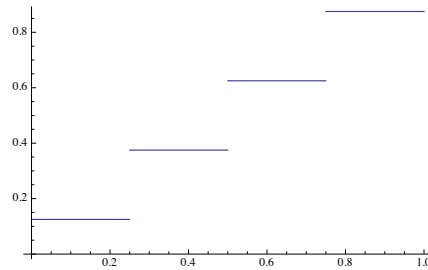


図 1.2 Haar scaling 関数  $\phi(t)$  と Haar wavelet 関数  $\psi(t)$  で張られる部分空間  $\{\phi(t), \psi(t), \psi(2t), \psi(2t-1)\} \in L^2([0, 1])$  へ関数  $f(t) = t$  を直交射影して得られた関数のグラフ。関数  $t$  を近似する階段関数になっている。さらに細かく近似するためにどのようにして Haar 基底関数系を選べばよいのだろうか。この解答は Wavelet 理論によって得られる。

```
haarScaling[t_] := If[t < 0 || 1 <= t, 0, 1] (*Haar scaling 関数*)
haarWavelet[t_] :=
Piecewise[{{1, 0 <= t && t < 1/2}, {-1, 1/2 <= t && t < 1}}, 0] (*Haar wavelet*)
hbasis[t] = {haarScaling[t], haarWavelet[t], haarWavelet[2t], haarWavelet[2t-1]} (*
基底関数系*)
f[t] = t; (* 元の関数 t *)
iph[p1_, p2_] := Integrate[p1 p2, {t, 0, 1}] (*内積関数*)
hpf[t_] = Sum[Projection[f[t], hbasis[t][[i]], iph], {i, 1, 4}] (*直交射影した
関数*)
Plot[hpf[t], {t, 0, 1}]
```

### 1.3.3 直交補空間

定義 1.60 (直交補空間)  $V_0$  を内積空間  $V$  の部分空間とする。 $V_0$  の直交補空間 (orthogonal complement)  $V_0^\perp$  を次で定義する :

$$V_0^\perp = \{|v\rangle \in V \mid \forall |w\rangle \in V_0 \text{ について } \langle w | v\rangle = 0\}$$

定理 1.61  $V_0$  を内積空間  $V$  の有限次元部分空間とする。このとき各  $|v\rangle \in V$  は  $|v_0\rangle \in V_0$  と  $|v_1\rangle \in V_0^\perp$  によって一意に  $|v\rangle = |v_0\rangle + |v_1\rangle$  と分解され、 $V$  は

$$V = V_0 \oplus V_0^\perp$$

と直和で表される。

証明  $|v\rangle \in V$  として、 $|v_0\rangle$  を  $|v\rangle$  の  $V_0$  への直交射影とする。 $|v\rangle = |v - v_0\rangle$  とすると、定理 1.52 より、 $|v_1\rangle \perp V_0$  である。 $|v\rangle = |v_0 + (v - v_0)\rangle = |v_0 + v_1\rangle$  において、 $v_1 \perp V_0$ . したがって、 $v_1 \in V_0^\perp$ . ■

例 1.62 例 1.38 の平面  $V_0 = \{(x, y, z)^t \mid 2x - y + 3z = 0\}$  を考える。  $\{|e_1\rangle = \frac{1}{21}(1, -4, -2)^t, |e_2\rangle = \frac{1}{6}(2, 1, -1)^t\}$  は正規直交系 ( $\|e_1\| = \|e_2\|, \langle e_1 | e_2 \rangle = 0$ ) で  $V_0$  を張る。

さて、ベクトル  $|v\rangle = (x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$  の  $V_0$  への直行射影  $|v_0\rangle$  は

$$\begin{aligned} |v_0\rangle &= \langle e_1 | v \rangle |e_1\rangle + \langle e_2 | v \rangle |e_2\rangle \\ &= \left( \frac{x - 4y - 2z}{21} \right) (1, -4, 2)^t + \left( \frac{2x + y - z}{6} \right) (2, 1, -1)^t. \end{aligned}$$

一方、 $|e_3\rangle = \frac{1}{14}(2, -1, 3)^t$  は  $\|e_3\| = 1$  かつ  $|e_3\rangle \perp V_0^\perp$  であることが確かめられる ( $\langle e_3 | e_1 \rangle = \langle e_3 | e_2 \rangle = 0$ )  $v_1$  を

$$\begin{aligned} |e_3\rangle &= \langle e_3 | v \rangle |e_3\rangle \\ &= \frac{2x - y + 3z}{14} (2, -1, 3)^t \end{aligned}$$

で定義すると、 $v_1$  は  $V_0^\perp$  への直交射影になっている ( $\langle v_1 | e_1 \rangle = \langle v_1 | e_2 \rangle = 0$ )

定理 1.63 (Gram-Schmidt の正規直交基底の構成) 内積空間  $V$  の任意の部分空間が  $N$  個の基底  $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_N\rangle\}$  で張られているとする。このとき、 $V$  の正規直交基底  $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots\}$  が構成でき、各  $|e_j\rangle$  は基底  $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots\}$  の線形結合として次のように表される。

$$\begin{aligned} |e_1\rangle &= |\tilde{e}_1\rangle / \sqrt{\|\tilde{e}_1\|}, & |\tilde{e}_1\rangle &= |v_1\rangle \\ |e_2\rangle &= |\tilde{e}_2\rangle / \sqrt{\|\tilde{e}_2\|}, & |\tilde{e}_2\rangle &= |v_2\rangle - \langle e_1 | v_2 \rangle |e_1\rangle \\ &\dots & & \\ |e_N\rangle &= |\tilde{e}_N\rangle / \sqrt{\|\tilde{e}_N\|}, & |\tilde{e}_N\rangle &= |v_N\rangle - \sum_{k=1}^{N-1} \langle e_k | v_N \rangle |e_k\rangle \\ &\dots & & \end{aligned}$$

証明

■

演習 1.64 例 1.18 および 1.43 で扱った  $L^2([0, 1])$  空間の単項式  $\{t^n\}_{n=0}^\infty$  を Gram-Schmidt の方法を使って区間  $[0, 1]$  上の正規直交基底を構成しなさい。また、Mathematica でその結果を検算しなさい。

(ヒント) Mathematica を使うと、 $\{1, t, t^2, t^3\}$  までの  $L^2([0, 1])$  の単項式系の正規直交基底は次で得られる。計算結果の検証を試みなさい。

$$\text{Orthogonalize}[\{1, t, t^2, t^3\}, \text{Integrate}[\#1 \#2, \{t, 0, 1\}] \&]$$

演習 1.65 区間  $[-1, 1]$  上の単項式  $\{1, t, t^2, t^3, \dots\}$  を Gram-Schmidt の方法で構成した正規直交基底は  $\left\{ \sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n(t) \right\}_{n=0,1,2,\dots}$  であることを確かめなさい。ここで、 $P_n(t)$  は区間  $[-1, 1]$  で定義された Legendre 多項式である。 $P_n(t)$  は Legendre の方程式

$$(1 - t^2) \frac{d^2 P(t)}{dt^2} - 2t \frac{dP(t)}{dt} + n(n + 1)P(t) = 0$$

の特解である。Legendre 多項式系は区間  $[-1, 1]$  上の完全直交系である。

たとえば、 $P_0(t) = 1$ ,  $P_1(t) = t$ ,  $P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$ ,  $P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$ ,  $P_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3)$  などである。Mathematica を使うと、この結果を検算してみなさい。

(ヒント)

```
Orthogonalize[{1, t, t^2, t^3}, Integrate[#1 #2, {t, -1, 1}] &]
```

演習 1.66 Legendre 多項式  $P_n(x)$  の Rodrigues 公式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

から

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k} (x+1)^k$$

を示しなさい。 $x = 1$  の  $P_n(x)$  の値を求めなさい。また、 $\{P_n(t)\}_{n=0,1,2,\dots}$  の正規直交性を示しなさい。

Mathematica を使って、 $P_0(x), P_1(x), \dots, P_{20}(x)$  の区間  $[0, 1]$  上のグラフを重ねて表示しなさい。

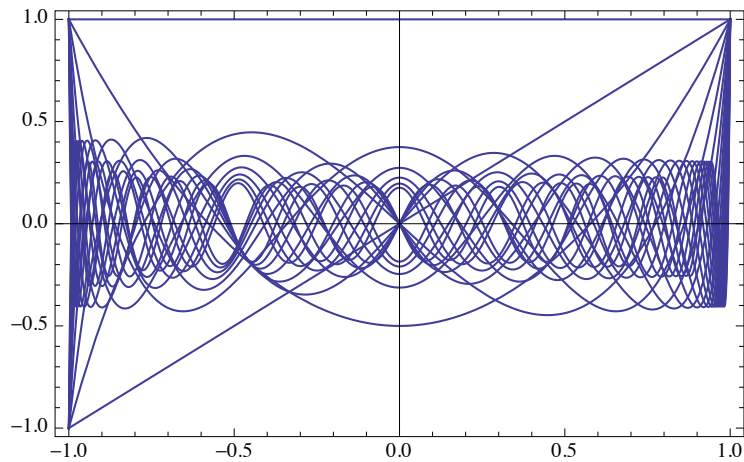


図 1.3 Legendre 関数  $P_n(x)$  の区間  $[-1, 1]$  でのグラフ ( $n = 0, 1, 2, \dots, 20$ )

## 1.4 基底の完全性 (全体性)

繰り返しになるが、もう一度定義として以下を述べておこう。

定義 1.67 内積空間  $V$  の部分空間  $V_0 \subseteq V$  の正規直交基底  $E^0 = \{|e_1^0\rangle, |e_2^0\rangle, \dots, |e_N^0\rangle\}$  について、ベクトル (関数)  $f \in V$  から次で定まる数列  $\{f_n\}_{n=1}^N$

$$f_n = \langle e_n^0 | f \rangle$$

を  $f$  の基底  $E^0$  による展開係数 (あるいは Fourier 型展開係数 Fourier-type expanding coefficients) または  $v$  の成分という。このとき、 $f$  の  $V_0$  への正射影は

$$\sum_{k=1}^N \langle e_n^0 | f \rangle |e_k^0\rangle$$

で与えられる。

明らかに

$$\|f - \sum_{k=1}^N f_n e_k^0\|^2 = \int ((x) - f_n e_k^0(x))^2 dx \geq 0$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|f - \sum_{k=1}^N f_n e_k^0\|^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^N |f_k|^2 - \sum_{i=1}^N f_i \langle e_i^0 | f \rangle - \sum_{j=1}^N f_j \langle f | e_j^0 \rangle \\ &= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^N |f_k|^2 - 2 \sum_{i=1}^N |f_i|^2 \end{aligned}$$

である。すなわち、内積空間  $V$  内の部分空間  $V_0 \subseteq V$  における任意の正規直交基底  $E^0$  について、 $\forall f \in V$  に対して

$$\sum_{k=1}^N |f_k|^2 \leq \|f\|^2 \tag{1.16}$$

が成立する。この (1.16) を Bessel の不等式という。気になるのは、この不等式がどんな条件のもとで  $N \rightarrow \infty$  のときに等式  $\sum_{k=1}^N |f_k|^2 \rightarrow \|f\|^2$  となるかである。

**定義 1.68** 空間  $V$  の任意の区分的に連続 (piecewise continuous) な関数<sup>\*2</sup>  $f \in V$  に対して、 $V$  の基底  $E = \{|e_n\rangle\}_{n=1,2,\dots}$  を使って  $f$  を展開  $\sum f_n |e_n\rangle$  したとき、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して

$$\|f - \sum_{k=1}^n f_k e_k\|^2 < \varepsilon, \quad f_k = \langle e_k | f \rangle, \quad n > N$$

であるような  $N$  が存在するとき、 $f$  は最小二乗の意味 (つまり  $L^2$  の平均収束の意味で) でいくらでも良く近似できるといい、そのような  $V$  の基底を完全 (complete) または全体的 (total) であるという。 $V$  の完全性 (全体性) は必ずしも基底の直交性を要求していないことに注意する。

この定義から、基底の完全直交性は Bessel の不等式において等式が成り立つ場合となることがわかった。

<sup>\*2</sup> ここでは、区分的に連続な関数を、その定義域が有限個の部分領域 (1 変数関数の場合には部分区間) に分かれ、その各内部で関数が連続で、各部分領域の内部から境界に近づくときに関数値が定まった有限境界値を持つものとしよう。もっと都合がよいのは、区分的に滑らか (piecewise smooth) な関数である。これは、区分的に連続かつ区分的に連続な導関数をもつことである。



定理 1.69 (完全性の条件) 空間  $V$  の基底  $E = \{|e_n\rangle\}_{n=1,2,\dots}$  が完全であるためには、任意の連続関数  $f \in V$  の展開係数  $\{f_n = \langle e_n | f \rangle\}$  に対して、完全性関係

$$\|f\|^2 = \sum_k |f_k|^2$$

が成立すれば十分である。また、完全性関係は、 $g \in V$  の展開係数  $\{g_n = \langle e_n | g \rangle\}$  と併せて、Parseval の等式

$$\langle f | g \rangle = \sum_k f_k g_k$$

の形にも表される (定理 2.45)。

証明 クーラン=ヒルベルト [6] の第2章や、関数解析の書物を参照。 ■

基底の完全性は関数の展開可能性 (各点収束)  $f = \sum_k f_k e_k$  を意味するわけではなくことに注意する。ここでは平均収束をいうだけである。この方向での議論に興味ある場合には、ヒルベルト空間論を含む関数解析の書物を研究する必要がある。このテキストでは、厳密さは追求せずに、必要に応じて注意する程度にとどめておくことにする。

基底の完全性の議論を深めると、定理 1.51 は次のように書き換えることができる。実をいうと、次の主張は縮退のない離散固有値を持つ線形演算子の固有関数が張る空間の完全性についての議論から得られるものであるが、その前提や厳密さを忘れて部分空間への射影演算子の理解を踏まえれば、形式的にその意味は容易に理解できるはずだ。

定理 1.70 可分な Hilbert 空間  $H$  の完全正規直交基底系  $\{|e_k\rangle\}_{k=1,2,\dots}$  において、演算子  $|e_k\rangle \langle e_k|$  の総和

$$I_H = \sum_k |e_k\rangle \langle e_k| \tag{1.17}$$

は、 $H$  上の恒等作用素である。このとき、 $H$  に属する任意のケット  $|f\rangle$  は、 $|f\rangle = I_V |f\rangle$  から直ちに

$$|f\rangle = \sum_k |e_k\rangle \langle e_k | f \rangle$$

と、係数  $\{\langle e_k | f \rangle\}$  を持つ完全正規直交基底  $\{|e_k\rangle\}$  によって展開できる。

## 1.5 作用素と随伴作用素

### 1.5.1 線形作用素

定義 1.71 ベクトル空間  $V$  と  $W$  の間の作用素  $T : V \rightarrow W$  が線形 (linear) とは次を満たすときである :

$$T(c_1 |v\rangle + c_2 |w\rangle) = c_1 T |v\rangle + c_2 T |w\rangle, \quad |v_i\rangle \in V, \text{ および } c_i \in \mathbb{C}.$$

注意 1.72 内積空間  $V$  の部分空間  $V_0$  で正規直交基底  $\{e_k\}$  を持つとき、定理 1.52 の直行射影  $P: V \rightarrow V_0$  は線形作用素で、 $v_1, v_2 \in V$  について  $P(av_1 + bv_2) = aP(v_1) + bP(v_2)$  である。

定理 1.73 (線形演算子の行列表示) 基底  $\{|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$  を持つ空間  $V$  から基底  $\{|w_1\rangle, \dots, |w_m\rangle\}$  を持つ空間  $W$  への線形作用素  $T: V \rightarrow W$  を考える。 $|v\rangle \in V$  の表現  $x = (x_1, \dots, x_n)^t$  および  $|w\rangle \in W$  の表現  $y = (y_1, \dots, y_m)^t$  に対して、 $T$  の作用は、行列  $A_T$  の要素

$$a_{ij} = \langle w_i | T | v_j \rangle$$

を使うと  $y = A_T x$  が成立する：

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

すなわち、線形作用素  $T$  は

$$T = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} |w_i\rangle \langle v_j| \quad (1.18)$$

のように表すことができる。行列  $A_T = (a_{ij})$  を基底  $\{|v_j\rangle\}$  および  $\{|w_i\rangle\}$  に関する線形作用素  $T$  の行列表示という。

証明

$|v\rangle = \sum_{j=1}^n x_j |v_j\rangle \in V$  に対して  $T$  の作用が  $|w\rangle = \sum_{k=1}^m y_k |w_k\rangle \in W$  をもたらずので、

$$\begin{aligned} |w\rangle &= \sum_{k=1}^m y_k |w_k\rangle = T \left( \sum_{j=1}^n x_j |v_j\rangle \right) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j T |v_j\rangle. \end{aligned}$$

両辺をブラ  $\langle w_i |$  とでの内積を取ると、 $\langle w_i | w \rangle = y_i$  に注意して

$$\begin{aligned} y_i &= \left\langle w_i \left| \sum_{j=1}^n x_j T |v_j\rangle \right. \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \end{aligned}$$

を得る。

$T$  の表式は、定理 1.52 から、空間  $V$  上の恒等作用素  $I_V$  および空間  $W$  上の恒等作用素  $I_W$  の射影演算子分解を使う。

$$\begin{aligned} T &= I_W T I_V = \sum_{i=1}^m |w_i\rangle \langle w_i| T \sum_{j=1}^n |v_j\rangle \langle v_j| \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |w_i\rangle \langle w_i| T |v_j\rangle \langle v_j| \end{aligned}$$

■

定義 1.74 線形作用素  $T : V \rightarrow W$  のノルム  $\|T\|$  を

$$\|T\| = \{ \max \|Tv\| \mid |v\rangle \in V \text{ かつ } \|v\| = 1 \}$$

で定義する。 $T$  のノルムが有限のとき、有界作用素 (bounded operator) という。

注意 1.75 有限次元内積空間におかる全ての線形作用素は有界である。また、任意の内積空間からその部分空間への直交射影も有界線形作用素である。

### 1.5.2 随伴作用素

定義 1.76 内積空間  $V$  と  $W$  間の有界線形作用素  $T : V \rightarrow W$  の随伴 (adjoint) または共役とは

$$\langle w | Tv \rangle_W = \langle T^\dagger w | v \rangle_V$$

で定まる線形作用素  $T^\dagger : W \rightarrow V$  である。

ブラケット表記はここでも強力なツールで、定義 1.76 で間接的に定義される線形作用素の随伴を直接的に書き出すことができる。

例 1.77 定理 1.73 の後半部の線形作用素の分解で登場していることだが、 $|v\rangle \in V$  と  $|w\rangle \in W$  から得られる演算子  $|w\rangle \langle v|$  は  $V$  から  $W$  への線形演算子  $|w\rangle \langle v| : V \rightarrow W$  である。この随伴は  $(|w\rangle \langle v|)^\dagger = |v\rangle \langle w|$  で、 $|v\rangle \langle w| : W \rightarrow V$  である。

演習 1.78  $|w\rangle \langle v| : V \rightarrow W$  とその随伴  $|v\rangle \langle w| : W \rightarrow V$  が線形作用素であることを確かめなさい。

例 1.79 例 1.77 を踏まえると、定理 1.73 の (1.18) から直ちに

$$\begin{aligned} T^\dagger &= \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |w_i\rangle \langle w_i| T |v_j\rangle \langle v_j| \right)^\dagger \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |v_i\rangle \langle v_j| T |w_j\rangle \langle w_i| \end{aligned}$$

を得る。この表式は随伴作用素  $T^\dagger$  を行列表示  $A_{T^\dagger}$  を使って直接与えている。この様子を詳しく追いかけてみよう。  $V$  および  $W$  のそれぞれの基底  $\{|v_i\rangle\}$  および  $\{|w_j\rangle\}$  による  $T$  の行列表示  $A_T = (a_{ij}) = (\langle w_i | T | v_j \rangle)$  および  $|v\rangle \in V$  と  $|w\rangle \in W$  の表現  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  を使うと

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{y} | A_T \mathbf{x} \rangle_W &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_i^* a_{ij} x_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m a_{ij}^* y_i \right)^* x_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m a_{ji}^\dagger y_i \right)^* x_j \\ &= \langle A_T^\dagger \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle_V \end{aligned}$$

と書き換えることができる。ただし、 $a_{ij}^\dagger = a_{ji}^*$  (転置共役) である。したがって、 $T$  の随伴  $T^\dagger$  に対応する行列表示  $A_{T^\dagger}$  は  $T$  に対応した行列表示  $A_T$  の転置共役  $A_T^\dagger$  であることがわかった。

例 1.80  $g$  を区間  $[a, b]$  上の有界関数としたとき、線形作用素  $T_g : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$  を次のように定義する：

$$T_g f(t) = g(t)f(t).$$

このとき、 $T_g$  の随伴は

$$T_g^\dagger h(t) = g(t)^* h(t)$$

与えられる。このことは、次からわかる：

$$\langle h | T_g f \rangle_{[a,b]} = \int_a^b h(t)^* g(t) f(t) dt = \int_a^b (g(t)^* h(t))^* f(t) dt = \langle g^* h | f \rangle_{[a,b]} = \langle T_g^\dagger h | f \rangle_{[a,b]}.$$

定理 1.81 (合成作用素の随伴)  $T_1 : V \rightarrow W$  および  $T_2 : W \rightarrow U$  を内積空間の間の 2 つの有界線形作用素とする。このとき

$$(T_2 \circ T_1)^\dagger = T_1^\dagger \circ T_2^\dagger$$

証明  $v \in V$  と  $u \in U$  に対して

$$\langle u | T_2 \circ T_1 v \rangle_U = \langle T_2^\dagger u | T_1 v \rangle_W = \langle T_1^\dagger \circ T_2^\dagger u | v \rangle_V$$

一方、随伴作用素の定義から

$$\langle u | T_2 \circ T_1 v \rangle_U = \langle (T_2 \circ T_1)^\dagger u | v \rangle_V.$$

■

定理 1.82 (直行射影の自己随伴性) 内積空間  $V$  からその部分空間  $V_0$  への直行射影作用素  $P$  について、

$$P_0^\dagger = P_0$$

である。

証明  $V_0$  の直交基底ケット  $\{|e_j^0\rangle\}_{j=1}^N$  を使った (1.14) の直交射影演算子の表現

$$P_0 = \sum_{k=1}^N |e_k^0\rangle \langle e_k^0|$$

から、演算子  $|\xi\rangle \langle \eta|$  の随伴性  $(|\xi\rangle \langle \eta|)^* = |\eta\rangle \langle \xi|$  を使えば、 $P_0^\dagger = P_0$  は明らかである。

[別証明] 多少長くなるが直交射影の性質それ自身から証明することもできる。定理 1.61 より、 $v, u \in V$  は  $v_0, u_0 \in V_0$  とそれに直交する  $v_1, u_1 \in V_0^\perp$  との和  $v = v_0 + v_1$  および  $u = u_0 + u_1$  のように直和分解することができる。このとき、 $P_0 v = v_0, P_0 u = u_0$  とすると、直交性を使って

$$\langle v | P_0 u \rangle = \langle v_0 + v_1 | u_0 \rangle = \langle v_0 | u_0 \rangle.$$

一方、

$$\langle P_0 v | u \rangle = \langle u_0 | u_0 + u_1 \rangle = \langle u_0 | u_0 \rangle.$$

これより、 $\langle P_0 v, u \rangle = \langle v, P_0 u \rangle$  となり、 $P_0^\dagger = P_0$  を得る。 ■

定義 1.83 (Hermite 性) 直交演算子のように、ある線形作用素  $H$  の随伴  $H^\dagger$  が自身に等しいとき  $H^\dagger = H$  であるような性質を自己随伴性 (self-adjoint) または Hermite 的 (hermitian) であるという。

演習 1.84 Hermite 性をもつ線形作用素の固有値は実数であることを示しなさい。

## 第2章

# Fourier 級数

### 2.1 Fourier の方法 ~ 偏微分方程式の解法

一様な熱が伝わる物質からなる棒の両端をつないで単位円（丸い輪）とする。輪の上の位置は  $0 \leq x \leq 2\pi$  で表される。さて、時刻  $t = 0$  のとき、この輪に温度分布  $f(x)$  が与えられたとして、その後の時刻  $t$  において丸い輪の温度分布  $u(x, t)$  を求めることを考えよう。初期（時刻  $t = 0$ ）の温度分布  $f(x)$  と時刻  $t$  での温度分布  $u(x, t)$  は、物体の形状が輪であることから、周期関数

$$f(x) = f(x + 2\pi), \quad u(x, t) = u(x + 2\pi, t)$$

である。

1 次元物体内の熱伝導は、つぎのような拡散係数  $c$  を持つ拡散方程式（熱方程式）

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

に従う。したがって、解くべき問題は

$$\text{初期条件} \quad u(x, 0) = f(x) \tag{2.2}$$

と

$$\text{周期条件} \quad u(x, t) = u(x + 2\pi, t) \tag{2.3}$$

のもとで、式 (2.1) を解くことである。なお、周期条件 (2.3) より、

$$\text{境界条件} \quad u(0, t) = u(2\pi, t), \quad u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) \tag{2.3'}$$

が導かれる。

J. Fourier は、境界条件 (2.3') を満たす拡散方程式 (2.1) の特解を変数分離法から求め、これらの特解を組み合わせて、初期条件 (2.2) も満たすように解を構成した。まず、解  $u(x, t)$  が変数分離されるとして

$$u(x, t) = X(x)T(t) \tag{2.4}$$

とにおいて、(2.1) を満たすように  $X(x)$  と  $T(t)$  を求めてみよう。式 (2.4) を (2.1) に代入すると

$$\frac{T'}{\mu T} = \frac{X''}{X} (= \lambda)$$

を得る。両辺が等しいことから、ある定数  $-\lambda$  に等しい。このことから

$$T' + \lambda\mu T = 0 \quad (2.5)$$

$$X'' = \lambda X = 0 \quad (2.6)$$

となる。

(2.5) の解は、直ちに得られて

$$T(t) = Ce^{-\lambda\mu t}$$

である。(2.6) の解は、 $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\lambda > 0$  にしたがって

$$X(x) = \begin{cases} Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}, & \lambda < 0 \\ A + Bx, & \lambda = 0 \\ A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x, & \lambda > 0 \end{cases}$$

となる。

これらの解から、境界条件 (2.3') を満たすものを探してみよう。(2.3') を書き直すと

$$X(0) = X(2\pi), \quad X'(0) = X'(2\pi) \quad (2.3'')$$

となるので、 $T(t) \equiv 0$  となるときは  $u(x, t) \equiv 0$  となる場合を除いて (2.3'') が成立している。(2.3'') が成り立つための条件を調べてみよう。

- (1)  $\lambda < 0$  の場合。(2.3'') から、 $A = B = 0$ 、つまり  $X(x) \equiv 0$  の場合に限る。
- (2)  $\lambda = 0$  の場合。あきらかに  $B = 0$ 、つまり  $X(x) \equiv A$ 。
- (3)  $\lambda > 0$  の場合。

$$\begin{aligned} (1 - \cos 2\pi\sqrt{\lambda})A - \sin 2\pi\sqrt{\lambda} \cdot B &= 0 \\ \sin 2\pi\sqrt{\lambda} \cdot A + (1 - \cos 2\pi\sqrt{\lambda})B &= 0 \end{aligned}$$

である。これが非自明な解  $A, B$  を持つためには、係数行列式が

$$(1 - \cos 2\pi\sqrt{\lambda})^2 + (\sin 2\pi\sqrt{\lambda})^2 = 0$$

である。したがって、 $\sqrt{\lambda}$  が整数  $n$ 、 $\lambda = n^2$  である場合に限る。つまり、任意の係数  $A, B$  について

$$X(x) = A \cos nx + B \sin nx, \quad n = 1, 2, \dots$$

は (2.3') を満たす。このとき

$$u(x, t) = e^{-\mu n^2 t} (A \cos nx + B \sin nx), \quad n = 1, 2, \dots$$

は (2.1)(2.3') の解となる。

以上から、 $A = A_n, B = B_n$  と書くと

$$u_0(x, t) = A_0, \quad u_n(x, t) = e^{-\mu n^2 t} (A_n \cos nx + B_n \sin nx), \quad n = 1, 2, \dots$$

はすべて (2.1)(2.3') の解であることがわかった。式の線形性から、これらの総和

$$A_0 + \sum_{n=1}^m e^{-\mu n^2 t} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \quad (2.7)$$

もまた (2.1)(2.3') の解となる。

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu n^2 t} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \quad (2.8)$$

において、任意係数  $A_0, A_n, B_n$  を上手く定めて、(2.8) が収束し、しかも (2.1)(2.3') の解となって、かつ初期条件 (2.2) も満たすようにできないかを検討しよう。

(2.8) が収束して解になるとすれば、

$$u(x, 0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

であるが、初期条件 (2.2) から

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \quad (2.9)$$

が成立しなければならない。

J. Fourier は任意の周期  $2\pi$  の周期関数  $f(x)$  に対して

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$B_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$$

と定めると、(2.9) が成立し、これらの係数  $A_0, A_n, B_n$  を使うと (2.8) によって熱伝導問題を解  $u(x, t)$  が得られると論じた。Fourier 自身は検討を加えていないが、もちろん、任意の関数  $f(x)$  がいつでも (2.9) の級数展開を持つわけではなく、その後の解析学の進歩をこのようにして始まったといえる。

ここまでの議論をまとめると、

I) 与えられた関数  $f(x)$  にどんな性質があれば

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

が可能であるか



II) 偏微分方程式の立場からは、その級数展開を用いて定義される関数項級数

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu n^2 t} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

が収束し、 $t \geq 0$  で連続な関数となり、 $t > 0$  で  $t$  について 1 回、 $x$  について 2 回項別微分可能となるか

が問題となるのである。

## 2.2 さまざまな用語

三角関数は取り扱いもやさしい初等関数であり、振動現象の記述には欠くことができない。Fourier 解析や信号処理などで使われる用語の多くが力学に由来している。以下、そうした用語をまとめておこう。

直線上に質量  $m$  の質点がバネ定数  $k$  の調和バネにつながれた往復運動を考える (図 2.1)。バネの自然長を原点とする平衡点からの変位を  $x$  としたとき、変位に比例した復元力  $F = -kx$  が働き、その運動方程式は次のようになる。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

わかり易さのために、 $\omega^2 = \frac{k}{m}$  とおいて

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

この方程式にしたがう運動を調和振動子 (harmonic oscillator) という。

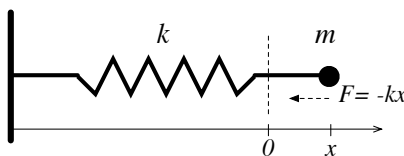


図 2.1 ばね定数  $k$  の調和振動子。質点に平衡点からの変位  $x$  に比例した復元力  $F = -kx$  が働く。

この一般解は

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta) \quad \text{または} \quad x(t) = a \cos(\omega t + \gamma)$$

であることは直ちに確かめられる。 $A$  を振幅 (amplitude)、 $\delta, \gamma$  を時刻  $t = 0$  における位相 (phase) という。1 振動に要する時間  $T$  (単位 [sec]) を周期 (period) といい、 $x(t) = x(t + T)$  を満たす。今の場合、

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

である。単位時間に往復する回数  $\nu = 1/T$  (単位 [Hz]) が周波数 (frequency) である。

$$\omega = 2\pi\nu$$

を角周波数 (angular frequency) という (単位 [rad/sec])

ばね定数  $k$  を持つ位置エネルギー (ポテンシャルエネルギー)  $U(x)$  は

$$U(x) = \frac{1}{k}x^2 = \frac{m\omega^2}{2}x^2 = \frac{m}{2}\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \delta).$$

また、運動エネルギー  $K$  は

$$K = \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \delta).$$

したがって、力学的全エネルギー  $E$  は

$$E = K + U = \frac{m\omega^2}{2} A^2$$

となり、調和振動子の全エネルギー  $E$  は時間によらずに一定で、振幅の 2 乗に比例している。後述するように、関数  $f(t)$  の Fourier 変換  $\hat{f}(\lambda)$  を角周波数  $\lambda$  を持つ  $f(t)$  成分とみなし、 $|\hat{f}(\lambda)|^2$  をパワースペクトル (power spectrum、または強度スペクトル) というのは、振幅の 2 乗をエネルギーとみなす背景があるためである。

電磁場や音波などの振動しながら伝搬する波を進行波 (traveling wave) という。このとき、1 周期に進む距離  $\lambda$  (単位 [m]) を波長 (wavelength)、単位時間あたりの伝搬距離を速度  $v$  (単位 [m/sec]) といい

$$v = \lambda \cdot \nu$$

の関係にある。

### 2.2.1 具体例

図 2.2 のように、両端点を固定した弦の振動を考えよう。単位長さの振動の様子を  $\sin \omega t$  で表し、これを八長調 C 音 (ドの音) とする (通常のピアノでは周波数 261.62Hz に調律される)。 $\frac{2}{3}$  単位長の弦の振動数は波長に反比例するので  $\frac{3}{2}$  倍となり、振動の様子は  $\sin \frac{3}{2} \omega t$  で表される。これが八長調音 E (ミの音) である。 $\frac{1}{3}$  単位長の弦の振動数は元の 3 倍となり、振動の様子は  $\sin 3\omega t$  で表される。これが八長調音 G (ソの音) である。したがって、CEG (ドミソ) の音の振動数比は  $1 : \frac{3}{2} : 3$  であり、人には心地よく聞こえる協和音 (consonance) となっている。

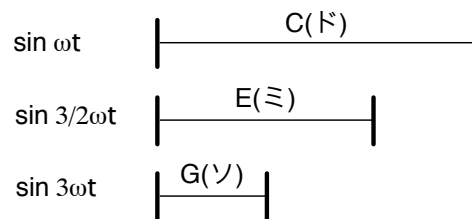


図 2.2 3つの弦の振動。弦の長さの比は  $1 : \frac{2}{3} : \frac{1}{3}$  となっている。その結果、弦の振動数比は  $1 : \frac{3}{2} : 3$  になる。これらの弦を同時に鳴らした音はドミソ協和音となって聞こえる。

ここで3つの正弦関数の和である次の関数  $f_0(t) \in L^2([-\pi, \pi])$  を考えよう。

$$f_0(t) = 3 \sin 2t + 4 \sin 3t + 2 \sin 6t$$

振幅はそれぞれ 3, 4, 2 であるために強度（振幅の2乗）は異なるが、振動数比は CEG 協和音と同じ 2 : 3 : 6 となっている。区間  $[-\pi, \pi]$  での  $f_0$  のグラフが図 2.3(a) である。次に関数  $f_1$  として  $f_0$  に振幅 0.2 の角周波数 100 の余弦波を加えたものを考えよう。図 2.3(b) が  $f_1$  のグラフである。

$$f_1(t) = \sin 2t + 4 \sin 3t + 2 \sin 6t + 0.2 \cos 100t$$

2つの関数  $f_0$  と  $f_1$  は有限和の Fourier 級数の形になっている（実際、 $f_0$  と  $f_1$  の Fourier 級数を計算してみよ）。

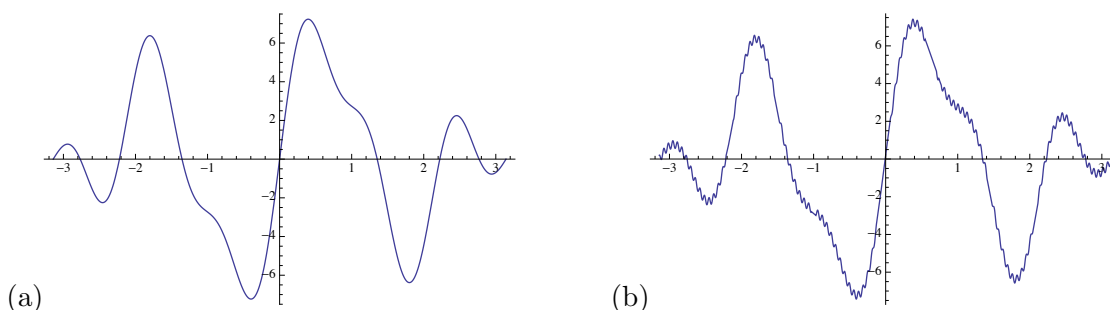


図 2.3 (a)  $f_0(t) = 3 \sin 2t + 4 \sin 3t + 2 \sin 6t$  と (b)  $f_1(t) = f_0(t) + 0.2 \cos 100t$  のグラフ。  $f_1$  は  $0.2 \cos 100t$  が混入した結果、 $f_0$  を小さい振幅で高周波数で揺らしたものになっていることがわかる。

$f_1$  から高周波が乗った小さい Fourier 係数 0.1 の項を落とした関数が  $f_0$  であるともいえる。一般に雑音 (noise) は高い周波数成分をもっている。信号処理の基本は、信号を基本波に分解して不要な成分（不要な基本波の係数）を落とした関数を得ることによって、雑音を除去したり（不可逆）データ圧縮することである。今の場合、 $f_1$  から  $f_0$  を得る過程は、高い周波数を濾し取って低い周波数成分を通過させたわけであるからローパスフィルタ (low pass filter) と呼ぶ。

関数  $f_1$  と  $f_0$  とはどの程度の違いがあるだろうか。次のように、 $L^2$  ノルムで測って相対誤差を具体的に計算することができる。

$$\text{相対誤差} = \frac{\|f_0\|_{L^2}}{\|f_1\|_{L^2}} = 0.999311$$

$L^2$  ノルムで測ると、ローパスフィルタによって  $f_1$  から Fourier 成分  $0.2 \cos 100t$  を取り除いた関数  $f_0$  は  $f_1$  とほとんど変わらないことがわかる。

演習 2.1 Mathematica を使って、関数  $f_0$  および  $f_1$  のグラフを描きなさい。また、 $L^2$  ノルムでその相対誤差が上記のようであることを確かめなさい。

（ヒント）たとえば、関数  $f_1$  のノルムを次のように計算する。

$$\text{nf1} = \text{Sqrt}[\text{Integrate}[(f_0[t] + 0.2 \text{Cos}[100 t])^2, \{t, -\text{Pi}, \text{Pi}\}]]$$

明らかなことだが、周期  $T$  が短くなるほど振動数  $\nu$  や角振動数  $\omega$  は大きくなり、一方で波長は短くなる。ヒトの可聴域は（個人差もあるが）周波数 20Hz から 15KHz 程度（高々 20KHz）とされている。男性よりも女性の方が高音に敏感な傾向があり、加齢により高音から聴きづらくなる。公衆電話回線では 300Hz から 3.4KHz の範囲の音声を伝えることができる（電話の音が聴きづらくなったときは要注意だ）。

人による聴覚実験結果と記録に要するデータ量とを勘案して、CD では理論的には 22,050Hz までの音声再現可能なように記録されている。音声は聴覚だけでなく肌や骨に対する振動として体感される。聴こえないとされている超高音も音質に影響するとして、通常の CD 以上の高音域までも再生可能な記録方式を利用するハイエンド・オーディオが注目を浴びている。

時間的に連続な信号（アナログ信号という）を時間的に離散なデータとして記録（サンプリングという）する場合、再生される周波数の上限は標本化定理によって定められる（データのデジタル化にはサンプリング過程の後にもう一段階、データ量子化の過程が必要である）。

## 2.3 Fourier 級数の基本

### 2.3.1 Fourier 級数の定義

定義 2.2 (Fourier 係数と Fourier 級数) 区間  $[-\pi, \pi)$  上の関数  $f(x)$  に対して

$$a_n = a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (2.10)$$

$$b_n = b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (2.11)$$

を第  $n$  次 Fourier 係数といい ( $n \geq 0$ )、形式的級数

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2.12)$$

を  $f$  の Fourier 級数と定義する。明らかに Fourier 級数は周期  $2\pi$  の周期関数である。

任意の有限区間  $[-a, a)$  上の関数についても後ほど同様な定義を与える。

Fourier 級数論とは関数  $f$  を三角関数を使った無限級数で近似しようとする試みである。問題となるのは、Fourier 係数の積分の意味や、どのようなときに  $S[f]$  が収束して元の関数  $f(t)$  に一致するのかなどである。

Fourier 級数の概念をさらに一般化して考えるのが関数の Fourier 変換で、Fourier 解析の理論の基礎となっている。ここで考える  $f$  は Lebesgue 可積分関数を考えるのが本来なのであるが、簡単のために、定義区間  $[a, b]$  上で高々有限個の不連続点  $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_N \leq b$  を持ち極限

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{x_1-\epsilon} \int_{x_1+\epsilon}^{x_2-\epsilon} \int_{x_2+\epsilon}^{x_3-\epsilon} \cdots \int_{x_N+\epsilon}^b |f(x)| \, dx < +\infty$$

が存在する絶対 Riemann 可積分な関数  $f$  を考察の対象としよう（絶対 Riemann 可積分な関数について成立するようなことは Lebesgue 可積分関数についても成立する）。

実関数であっても、次のように複素形式で Fourier 級数を考える場合が多い。

**定義 2.3 (複素形式の Fourier 級数)** 区間  $[-\pi, \pi)$  上の実関数  $f(x)$  に対して

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (2.13)$$

を複素形 Fourier 係数、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n e^{inx} \quad (2.14)$$

を複素形 Fourier 級数と定義する。

**注意 2.4**

$$\widehat{f}_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

とすると、

$$\widehat{f}_{-n} e^{-inx} + \widehat{f}_n e^{inx} = a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

であることに注意する。 $f$  が実関数のとき  $a_n, b_n$  も実であるので、(2.14) は (2.12) に一致する。また、 $a_{-n} = a_n, b_{-n} = b_n$  であることから

$$\widehat{f}_n^* = \widehat{f}_{-n} \quad (2.15)$$

の関係にある。

**演習 2.5** (2.15) を複素 Fourier 係数の定義から直接示しなさい。

**定理 2.6 (Fourier 基底の直交性)** (1) 実 Fourier 基底  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $L^2([-\pi, \pi])$  の正規直交系である :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 1 & n = m > 0 \\ 2 & n = m = 0 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \delta_{nm},$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0.$$

(2) 複素 Fourier 基底  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$  は  $L^2([-\pi, \pi])$  の正規直交系である :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \delta_{nm}.$$

**演習 2.7** この定理を証明しなさい。これらの正規直交系は完全である。

一様収束する次の関数

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx \quad (2.16)$$

を考てみよう。  $f(x)$  と  $\cos mx$  との内積をとると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx \\ &= \frac{\alpha_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\alpha_n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx + \frac{\beta_n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx \right) \\ &= \alpha_m \end{aligned}$$

同様にして

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = \beta_m$$

が得られる。したがって、(2.16) の級数は Fourier 級数 (2.12) に一致することがわかる。複素形式の一様収束級数  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}$  についても同様である。ただし、ここでは、一様収束する級数であるために積分と総和の順序が入れ替えられることを使った。一般の場合について、こうして定義される級数の収束性とそれが  $f$  に一致するかどうかは Fourier 級数論の中心課題である。

**注意 2.8** 定理 1.51 や定理 1.70 の言葉をつかえば、関数  $f$  の Fourier 係数は  $f$  の Fourier 基底への直交射影 (Fourier 基底との  $L^2$  内積) として求められるということである。

### 2.3.2 区間の拡張

$f(x)$  を周期  $2a$  の関数  $f(x) = f(x + 2a)$  とすると、 $f(at/\pi) = f(at/\pi + 2a) = f(a(t + 2\pi)/\pi)$  に注意すれば、 $g(t) = f(at/\pi)$  は  $t$  について区間  $[-\pi, \pi)$  上の周期  $2\pi$  の関数となる。 $g(t)$  の Fourier 級数を

$$S[g] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

とする。ここで  $t = \pi x/a$  とおいて、次の定義が得られる。

**定義 2.9** (区間  $[-a, a)$  上の Fourier 級数)  $f(x)$  を区間  $[-a, a)$  上の関数とする。 $f$  の Fourier 級数を

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k}{a} x + \sin \frac{\pi k}{a} x, \quad (2.17)$$

その Fourier 係数を

$$a_k = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cos \frac{\pi k}{a} x \, dx, \quad k \geq 0 \quad (2.18)$$

$$b_k = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \sin \frac{\pi k}{a} x \, dx \quad (2.19)$$

で定義する。この Fourier 級数は周期  $2a$  の周期関数である。

(2.17) の複素形を

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{i\pi n x/a}, \quad (2.20)$$

その複素係数は

$$\gamma_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) e^{-i\pi n x/a} dx \quad (2.21)$$

で定義する。

次に区間  $[0, a]$  上で定義されている関数  $f(x)$  を区間  $[-a, a]$  の関数に拡張することを考えてみよう。これには偶拡張 (even extension)  $f_{ev}$  と奇拡張 (odd extension)  $f_{od}$  の2つの方法がある (図 2.4 参照)。

偶拡張 区間  $[0, a]$  上の関数  $f(x)$  を区間  $[-a, a]$  上の偶関数  $f_{ev}(x)$  に次のようにして拡張する :

$$f_{ev}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x < a \\ f(-x) & -a \leq x < 0 \end{cases}$$

奇拡張 区間  $[0, a]$  上の関数  $f(x)$  を区間  $[-a, a]$  上の奇関数  $f_{od}(x)$  に次のようにして拡張する :

$$f_{od}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x < a \\ -f(-x) & -a \leq x < 0 \end{cases}$$

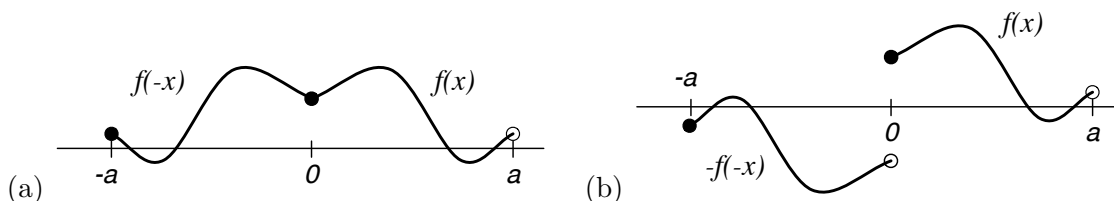


図 2.4 区間  $[0, a]$  上の関数  $f(x)$  の偶関数拡張 (a) および奇関数拡張 (b)

定理 2.10 区間  $[0, a]$  上で定義された関数  $f(x)$  が与えられている。

- (1) 区間  $[-a, a]$  へ偶拡張した関数  $f_{ev}(x)$  の区間  $[-a, a]$  における Fourier 級数は、次のように定数と余弦関数だけからなる :

$$S[f_{ev}] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{a},$$

$$a_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{k\pi x}{a} dx, \quad k \geq 0.$$

(2) 区間  $[-a, a)$  へ奇拡張した関数  $f_{od}(x)$  の区間  $[-a, a)$  における Fourier 級数は、次のように正弦関数だけからなる：

$$S[f_{od}] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{a},$$

$$b_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx$$

演習 2.11 定理 2.10 を示しなさい。

区間  $[a, b)$  で定義された関数はいつでも、 $f(b) = f(a)$  であるように  $\mathbb{R}$  上の周期  $b - a$  の周期関数に拡張することができる (図 2.5)。これを関数の周期拡張 (periodic extension) という。ただし、周期  $b - a$  は周期拡張した関数の最小周期であるとは限らない。

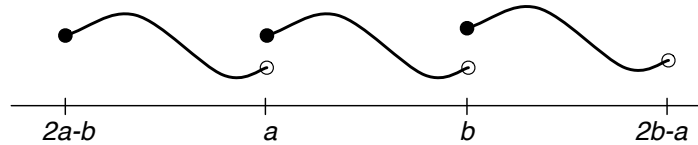


図 2.5 区間  $[a, b)$  上の関数  $f(x)$  の周期拡張

節 2.6.1 で見るように、区間  $[0, a]$  で定義された関数を  $[-a, a)$  上の偶関数拡張または奇関数拡張し、区間  $[-a, a)$  をさらに周期拡張することはいつでも可能だ。

したがって、区間  $[-a, a)$  で定義された任意の関数は、自然に周期  $2a$  を持つ  $\mathbb{R}$  上の周期関数  $f(x) = f(x + 2a)$  と見なすことができる。その場合、(2.18) や (2.19) の Fourier 係数をさだめる積分計算においては、つぎの補題のように幅  $2a$  の任意の積分区間で計算できる。

補題 2.12  $F(x)$  が周期  $2a$  をもつ可積な周期関数とする。  $c$  を任意の実数について

$$\int_{-a}^a F(x) dx = \int_{-a+c}^{a+c} F(x) dx$$

証明  $F$  が周期  $2a$  であることと変数  $x$  を  $x' - 2a$  に取り替えると、

$$\int_{-a}^{-a+c} F(x) dx = \int_a^{a+c} F(x') dx'$$

に注意する。

$$\begin{aligned} \int_{-a+c}^{a+c} F(x) dx &= \int_{-a}^{a+c} F(x) dx - \int_{-a}^{-a+c} F(x) dx = \int_{-a}^{a+c} F(x) dx + \int_{a+c}^a F(x) dx \\ &= \int_{-a}^a F(x) dx \end{aligned}$$

■



### 2.3.3 Fourier 係数の性質

簡単のために関数  $f$  と  $g$  は周期  $2a$  の周期関数とする。 $f(x)$  や  $g(x)$  の Fourier 係数は複素表示で、(2.20) および (2.21) より

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n e^{i\pi n x/a}, \quad \widehat{f}_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) e^{-i\pi n x/a} dx$$

などと表される。

**定義 2.13 (たたみこみ)** 周期  $2a$  の周期関数  $f$  と  $g$  のたたみこみ (convolution)  $f * g$  を

$$(f * g)(x) = \int_{-a}^a f(x-y)g(y) dy = \int_{-a}^a f(y)g(x-y) dy \quad (2.22)$$

で定義する。(因子  $\frac{1}{2a}$  を掛けてたたみこみとする定義もある。ここでは  $\mathbb{R}$  上の一般の関数に対するたたみこみに倣って、上の式を採用した。)

**定理 2.14 (Fourier 係数の性質)**  $f$  と  $g$  を周期  $2a$  の可積分関数、 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  とするとき、

- (i)  $\widehat{(\alpha f + \beta g)}_n = \alpha \widehat{f}_n + \beta \widehat{g}_n$ ,
  - (ii)  $\widehat{(f * g)}_n = 2a \widehat{f}_n \cdot \widehat{g}_n$ ,
  - (iii)  $|\widehat{f}_n| \leq \|f\|_1$ ,
- ただし、 $\|f\|_1 = \frac{1}{2a} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$ .

**証明** (i) は Fourier 係数の定義からあきらか。(ii) を示す。

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}_n &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a (f * g)(x) e^{-i\pi n x/a} dx \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \left( \int_{-a}^a f(x-y) e^{-i\pi n(x-y)/a} g(y) e^{-i\pi n y/a} dy \right) dx \\ &= 2a \cdot \frac{1}{2a} \int_{-a}^a g(y) e^{-i\pi n y/a} dy \cdot \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x-y) e^{-i\pi n(x-y)/a} dx = 2a \widehat{g}_n \cdot \widehat{f}_n. \end{aligned}$$

(iii) は次から明らか。

$$|\widehat{f}_n| \leq \frac{1}{2a} \int_{-a}^a |f(x) e^{-i\pi n x/a}| dx = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a |f(x)| dx.$$

■

## 2.4 Dirichlet 核

Fourier 級数の収束性の議論などでしばしば重要な役割を果たす表式 Dirichlet 核 (Dirichlet kernel) を導入しておこう。

定義 2.15 (Dirichlet 核) 周期  $T$  の Dirichlet 核を

$$D_N(x, T) = \frac{\sin\left((2N+1)\frac{\pi}{T}x\right)}{T \sin\frac{\pi}{T}x} \quad (2.23)$$

で定義し、特に  $T = 2\pi$  の場合 (図 2.6) は

$$D_N(x) = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{2\pi \sin\frac{x}{2}} \quad (2.24)$$

と書くことにする。

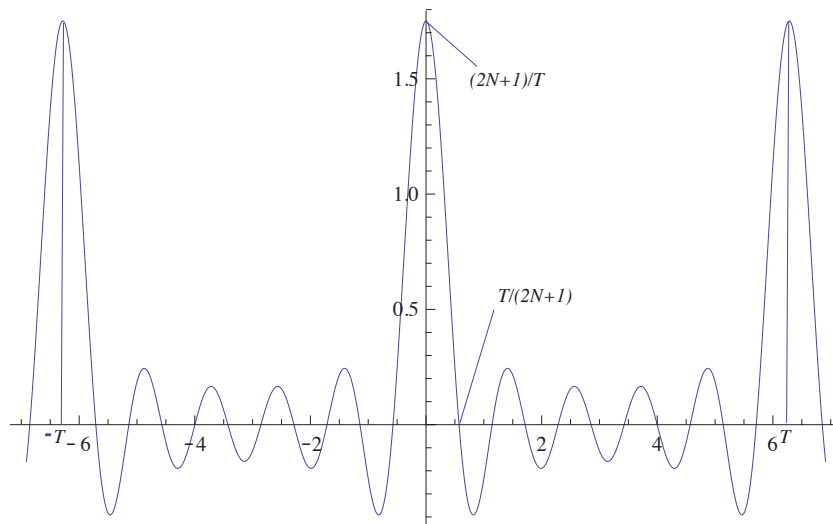


図 2.6 周期  $T = 2\pi$ ,  $N = 5$  の Dirichlet 核  $D_N(x)$  のグラフ

命題 2.16 (Dirichlet 核の級数表示)

$$D_N(x) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos nx \right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{inx}. \quad (2.25)$$

証明 Euler の関係式  $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$  より、右側の等式は次から明らかである。

$$\sum_{n=-N}^N e^{inx} = 1 + \sum_{n=1}^N (e^{inx} + e^{-inx}) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos nx$$

さて、 $\forall z \in \mathbb{C}$  について

$$\sum_{n=0}^N z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$$

であることを思いおこそう。これから

$$1 + 2 \sum_{n=1}^N z^n = \frac{1 + z - 2z^{N+1}}{1 - z}$$

と書ける。 $z = e^{ix}$  において、右辺の分母分子に  $e^{-ix/2}$  をかけると

$$1 + 2 \sum_{n=1}^N e^{inx} = \frac{\cos \frac{x}{2} - [\cos(N + \frac{1}{2})x + i \sin(N + \frac{1}{2})x]}{-i \sin \frac{x}{2}}.$$

両辺の実部をとって結果を得る。 ■

注意 2.17 上の最終式で、両辺の虚部を共役 Dirichlet 核  $\tilde{D}_N(x)$  といい

$$\tilde{D}_N(x) = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} = 2 \sum_{n=1}^N \sin nx = \sum_{n=-N}^N -i \operatorname{sign}(n) e^{inx}$$

である。ここで、 $\operatorname{sign}(\cdot)$  は  $x \in \mathbb{C}$  について

$$\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} z/|z| & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}.$$

演習 2.18

$$D_N(x, T) = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^N e^{i \frac{2\pi n}{T} x} = \frac{1}{T} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos \frac{2\pi n}{T} x \right)$$

を示しなさい。

演習 2.19

$$\int_{-T/2}^{T/2} D_N(x, T) dx = 1 \tag{2.26}$$

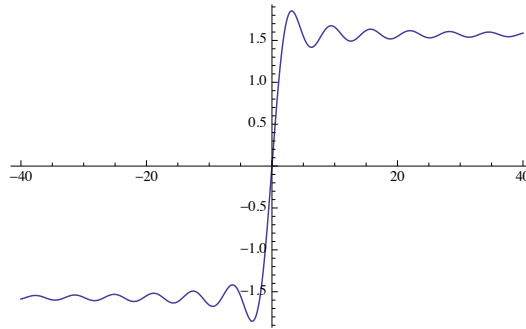
を示しなさい。

## 2.5 積分正弦関数

Fourier 級数論で Dirichlet 核  $D_N(x)$  と共に基本的役割を果たす関数に、積分正弦関数 (sine integral)  $\operatorname{Si}(x)$  がある。

$$\begin{aligned} \operatorname{Si}(x) &= \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad 0 \leq x < \infty \\ &= x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} - \frac{x^7}{35280} + \frac{x^9}{3265920} + \cdots \end{aligned}$$

$\operatorname{Si}(x)$  は、不連続分岐を持たない整関数である (図 2.7)。

図 2.7 積分正弦関数  $\text{Si}(x)$  のグラフ

演習 2.20 上で与えた  $\text{Si}(x)$  のべき級数展開を  $\frac{\sin t}{t}$  の展開を使って自ら計算しなさい。

演習 2.21 Mathematica の組み込み関数 `SinIntegral[ ]` を使って、積分正弦関数のグラフを描きなさい。また、関数 `Series[f[x], {x, a, n}]` は関数  $f(x)$  の  $x = a$  に関する  $(x - a)^n$  次までのべき級数を作成する。これを使って積分正弦関数の級数展開をいくつか求めて、先の演習結果と比べてみなさい。

定理 2.22 (積分正弦関数の性質)

- (i)  $\text{Si}(x)$  は  $\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$  で局所極大値、 $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$  で局所極小値をとる。
- (ii)  $\text{Si}(0) = 0$ 。
- (iii) 広義積分  $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{Si}(x)$  を持ち、 $\text{Si}(\infty) = \frac{\pi}{2} = 1.5708$ 。
- (iv)  $0 \leq x$  について、 $\text{Si}(x) \leq \text{Si}(\pi) = 1.85194$

証明 (i)  $d\text{Si}(x)/dx = \sin x/x = 0$  を満たす  $x$  を求めることによって明らか。

(ii) 定義から明らか。

(iii) 実際、 $0 < a < b < +\infty$  に対して

$$\left| \int_a^b \frac{\sin t}{t} dt \right| = \left| \left[ -\frac{\cos t}{t} \right]_a^b - \int_a^b \frac{\cos t}{t^2} dt \right| \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \int_a^b \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{2}{a}$$

この不等式の右辺は  $a \rightarrow \infty$  で 0 となるため、広義積分  $\text{Si}(\infty)$  は Cauchy の収束条件を満たして収束する。ただし、絶対収束はしない。実際、

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t + n\pi} dt > \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin t dt = \frac{2}{(n+1)\pi} > \frac{2}{\pi} \int_{n+1}^{n+2} \frac{dt}{t}$$

に注意すると、

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt > \frac{2}{\pi} \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \frac{2}{\pi} \log(n+1) \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty$$

であるので発散し、絶対収束しないことがわかる。

後出の補題 2.28 では漸近評価によって同じ結果を示すことになるが、 $d(x) = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} - \frac{2}{x}$  ( $x = 0$  で  $d(0) = 0$  と定義しておく) は区間  $[0, \pi]$  で連続であるので Riemann-Lebesgue の補題 2.32 から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{2}{t} \right) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt = 0.$$

したがって、

$$\text{Si}(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{t} dt$$

上の Riemann-Lebesgue の補題の結果より

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} D_n(t) dt = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

によって目的の結果を得る。 $D_n(x)$  は Dirichlet 核で、積分式 (2.26) の結果を使った。

[Si( $\infty$ ) の値を求める別法] 上記の計算は直感的でなく、面倒に思われるかもしれない。Fourier 変換の理論を使うと「楽に」計算することができる (演習 3.4)。

区間  $[-1, 1]$  上で 1、それ以外では 0 の関数  $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$  を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

で定義する。 $f(x)$  は偶関数であることに注意して、 $f$  の Fourier 変換  $\hat{f}(\lambda)$  を計算する。

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \end{aligned}$$

Fourier 逆変換の公式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x} d\lambda$$

を使うと

$$f(0) = 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda,$$

すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda = 2 \cdot \text{Si}(\infty) = \pi.$$

(iv)  $0 \leq 2k\pi < t < (2k+1)\pi$  に対して  $\sin t/t > 0$  および  $0 < (2k+1)\pi < t < (2k+2)\pi$  に対して  $\sin t/t < 0$  に注意すると、

$$\text{Si}((n+1)\pi) - \text{Si}(n\pi) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt, \quad n \geq 0$$

は  $n$  ごとに符号を変え、 $n \rightarrow \infty$  でその差は小さくなる (図 2.7)。したがって、性質 (i) とを併せると  $0 \leq x$  について、 $\text{Si}(x) \leq \text{Si}(\pi)$  である。 $\text{Si}(\pi)$  の値はベキ級数から計算できる。 ■

## 2.6 Fourier 級数の計算

Fourier 級数が収束したり元の関数  $f$  に一致するかが主な関心となるのであるが、Fourier 級数を計算することは重要である。

### 2.6.1 連続三角波

区間  $[0, \pi)$  上の三角波関数を次で定義する：

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases} \quad (2.27)$$

この関数を区間  $[-\pi, \pi)$  に偶関数拡張および奇関数拡張して連続関数 (ただし、 $C^1$  級ではない) を得る。これを連続三角波とし、その Fourier 級数を求めてみよう。

偶関数拡張 区間  $[-\pi, \pi)$  へ

$$f_{ev}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x < \pi \\ f(-x) & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

と偶関数拡張する (図 2.8)。

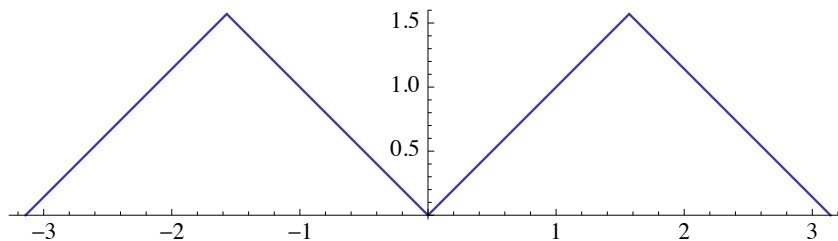


図 2.8 区間  $[0, \pi)$  上の三角波の  $[-\pi, \pi)$  への偶関数拡張

定理 2.10 より、 $f_{ev}$  の区間  $[-\pi, \pi)$  における Fourier 級数は余弦関数だけを含み、その Fourier 係数は  $f(x)$  を使って次のように計算できる。

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \\ a_j &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos jx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \cos jx dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \cos jx dx \\ &= \frac{4 \cos j\pi/2 - 2 \cos j\pi - 2}{\pi j^2}, \quad j \geq 1 \end{aligned}$$

この結果から、 $a_0$  以外の Fourier 余弦係数は  $a_{4k+2}$  だけが非零となることがわかり

$$a_{4k+2} = -\frac{2}{\pi(2k+1)^2}, \quad k \geq 0,$$

と表される。したがって、偶関数拡張された連続三角関数の Fourier 級数は次のように表される：

$$S[f_{ev}] = \frac{a_0}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(4k+2)x.$$

偶関数拡張  $f_{ev}$  としたとき、その最初の  $N$  次近似  $S_N(x)$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} S_2(x) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2 \cos 2x}{\pi} \\ S_6(x) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2 \cos 2x}{\pi} - \frac{2 \cos 6x}{9\pi} \\ S_{10}(x) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2 \cos 2x}{\pi} - \frac{2 \cos 6x}{9\pi} - \frac{2 \cos 10x}{25\pi} \\ S_{14}(x) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2 \cos 2x}{\pi} - \frac{2 \cos 6x}{9\pi} - \frac{2 \cos 10x}{25\pi} - \frac{2 \cos 14x}{49\pi} \end{aligned}$$

これらの関数のグラフを区間  $[0, \pi)$  で表示したのが図 2.9 である。

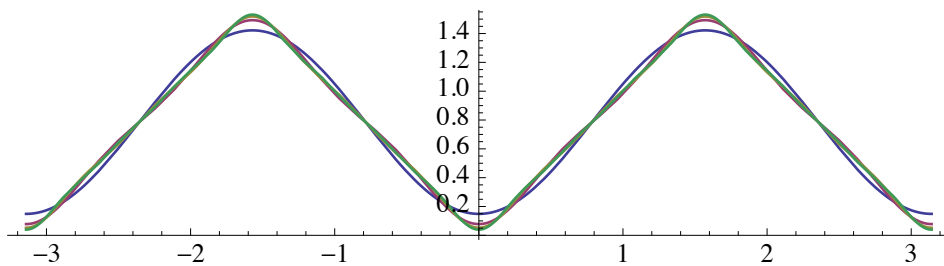
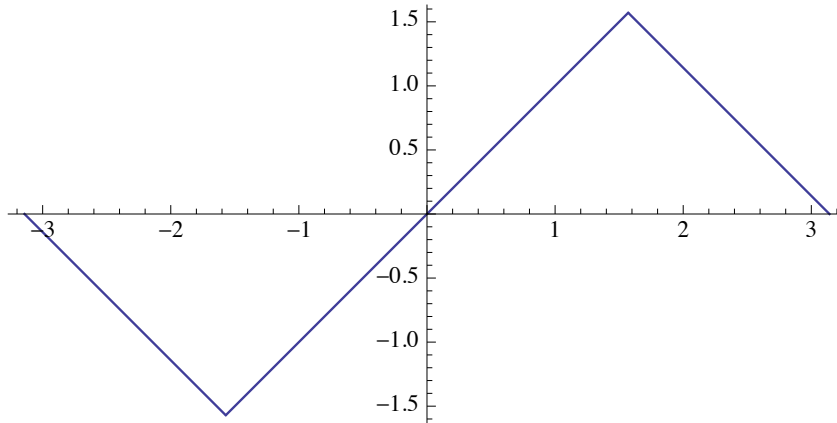


図 2.9 区間  $[0, \pi)$  上の三角波  $f(x)$  を偶関数  $f_{ev}$  に拡張し、その第 2, 6, 10, 14 次 ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) の Fourier 余弦級数  $S_N(x)$  で近似した様子。  $f_{ev}$  は区間  $[-\pi, \pi)$  の両側に偶関数として周期  $2\pi$  で広がっていることに注意。

奇関数拡張 区間  $[-\pi, \pi) \curvearrowright$

$$f_{od}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x < \pi \\ -f(-x) & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

と奇関数拡張する (図 2.10)。

図 2.10 区間  $[0, \pi)$  上の三角波の  $[-\pi, \pi)$  への奇関数拡張

定理 2.10 より、 $f_{od}$  の区間  $[-\pi, \pi)$  における Fourier 級数は正弦関数だけを含み、その Fourier 正弦係数は  $f(x)$  を使って次のように計算できる。

$$b_j = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin j\pi = \frac{4 \sin j\pi/2}{\pi j^2}$$

$$= \begin{cases} 0 & j = 2m, \\ \frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)^2} & j = 2m+1, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

と表される。したがって、奇関数拡張された連続三角関数の Fourier 級数は次のように表される：

$$S[f_{od}] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)^2} \sin(2m+1)x.$$

奇関数拡張  $f_{od}$  としたとき、最初の  $N$  次近似  $S_N(x)$  は次のようになる。

$$S_1(x) = \frac{4 \sin x}{\pi},$$

$$S_3(x) = \frac{4 \sin x}{\pi} - \frac{4 \sin 3x}{9\pi},$$

$$S_5(x) = \frac{4 \sin x}{\pi} - \frac{4 \sin 3x}{9\pi} + \frac{4 \sin 5x}{25\pi},$$

$$S_7(x) = \frac{4 \sin x}{\pi} - \frac{4 \sin 3x}{9\pi} + \frac{4 \sin 5x}{25\pi} - \frac{4 \sin 7x}{49\pi}.$$

これらの関数のグラフを区間  $[0, \pi)$  で表示したのが図 2.11 である。



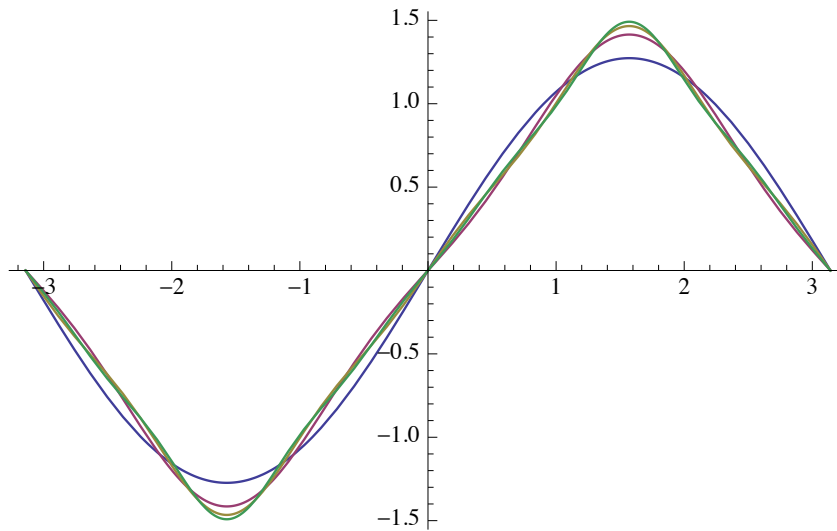


図 2.11 区間  $[0, \pi)$  上の三角波  $f(x)$  を奇関数  $f_{od}$  に拡張し、その第 1,3,5,7 次の Fourier 正弦級数  $S_N(x)$  で近似した様子。  $f_{od}$  は区間  $[-\pi, \pi)$  の両側に奇関数として周期  $2\pi$  で広がっていることに注意。

演習 2.23 上記の連続三角波の偶および奇関数拡張の Fourier 級数展開を実際に計算してみなさい。さらに、Mathematica などを使って Fourier 有限和の関数のグラフを描いてみなさい。

(ヒント) 区間  $[0, \pi)$  上の連続三角波を

```
f[x_] := Piecewise[{{x, 0 <= x && x <= Pi/2}, {Pi - x, Pi/2 < x <= Pi}}]
```

で表すと、偶関数および奇関数拡張は次のようになる：

```
fe[x_] := Piecewise[{{x+Pi, -Pi <= x && x < -Pi/2},
  {-x, -Pi/2 < x && x < 0}, {x, 0 <= x && x <= Pi/2}, {Pi-x, Pi/2 < x <= Pi}}]
fo[x_] := Piecewise[{{-x-Pi, -Pi < x && x < -Pi/2},
  {x, -Pi/2 <= x && x <= Pi/2}, {Pi-x, Pi/2 < x <= Pi}}]
```

$n$  次 Fourier 余弦級数および  $n$  次 Fourier 正弦級数を与える関数を次のように定義する：

```
fc[x_, n_] := FourierCosSeries[f[x], x, n]
fs[x_, n_] := FourierSinSeries[f[x], x, n]
```

図 2.9 の第 2,6,10,14 次 ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) の Fourier 余弦級数の区間  $[0, \pi)$  のグラフはそれぞれの次数の関数を求めてから、まとめて次のように表示した。

```
Plot[{fc2[x], fc6[x], fc10[x], fc14[x]}, {x, 0, Pi}]
```

## 2.7 不連続関数の Fourier 級数

不連続点をもつような関数の Fourier 級数を考えてみよう。

### 2.7.1 Haar Scaling 関数もどきの Fourier 級数

例 1.58 の Haar scaling 関数は実数上で定義された関数であるが、区間  $[-2, 2)$  上で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & -2 \leq x < 0, 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

を考えよう。この関数は偶関数でも奇関数でもなく、 $x = 1$  で不連続性を持つ。

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 1 dt = \frac{1}{2}, \\ a_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(t) \cos \frac{n\pi t}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \cos \frac{n\pi t}{2} dt = \frac{\sin n\pi/2}{n\pi} \\ &= \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi}, \quad (n = 2k+1). \end{aligned}$$

同様にして、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(t) \sin \frac{n\pi t}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin \frac{n\pi t}{2} dt = \frac{1 - \cos n\pi/2}{n\pi} \\ &= \begin{cases} 0 & n = 4k, \\ \frac{1}{(4k+1)\pi} & n = 4k+1, \\ \frac{1}{(2k+1)\pi} & n = 4k+2, \\ \frac{1}{(4k+3)\pi} & n = 4k+3. \end{cases} \end{aligned}$$

したがって、これらの係数を使って

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0} a_n \cos \frac{n\pi x}{2} + b_n \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

演習 2.24 上記の Haar scaling 関数もどきを修正して、区間  $[-1, 1)$  の関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

とした場合、この Fourier 級数を計算しなさい。

### 2.7.2 矩形波

区間  $[-\pi, \pi)$  で定義される奇関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi \\ -1 & -\pi \leq x < 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

を周期  $2\pi$  で周期拡張して矩形波 (square wave) または方形波という。

奇関数であるので、定理 2.10 より Fourier 正弦級数を持つ。

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \left( -\int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi} \right) \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \frac{1 - \cos \pi n}{n}$$

$$= \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{4}{(2k+1)\pi} & n = 2k+1 \end{cases}$$

したがって、

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)x \quad (2.29)$$

となる。11 次の項までの有限和は次のようである。

$$S_{N=11}[f] = \frac{4 \sin x}{\pi} + \frac{4 \sin 3x}{3\pi} + \frac{4 \sin 5x}{5\pi} + \frac{4 \sin 7x}{7\pi} + \frac{4 \sin 9x}{9\pi} + \frac{4 \sin 11x}{11\pi}$$

周期拡張した場合、方形波の不連続点  $\dots, \pi, 0, \pi, \dots$  での Fourier 級数値は明らかに厳密に 0 となるが、この値 0 は

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} (f(0 - \epsilon) + f(0 + \epsilon)) = \frac{1}{2} (f(0+) + f(0-))$$

であることに注意しよう。この事実は、不連続点を持つ関数の各点収束についての示唆を与えている。

さらに、図 2.12(a) は、Fourier 級数の  $N$  次有限和  $S_N(x)$  を  $N = 3, 5, 7, 9, 11$  とした関数を重ねたグラフで、 $N$  を大きくすると連続区間では部分級数が一様収束しているように観察できる。しかしながら、不連続点近傍では収束は一様でなく、しかも近似次数  $N$  をいくら大きくしても有限和である限り、有意な誤差を生ずる範囲の広がり (ギャップ幅) は狭くなっていくものの、元の関数値  $f(x)$  からの誤差 (overshoot という) の大きさは一定値以下にはならないことが観察できる (図 2.12(b) 参照)。この現象を Gibbs 現象 (Gibbs phenomena) という。

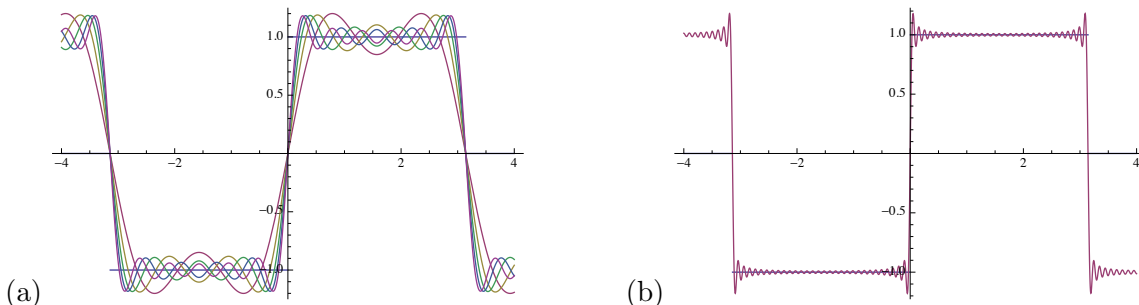


図 2.12 (a) 区間  $[-\pi, \pi)$  で定義された方形波の Fourier 級数の  $N = 3, 5, 7, 9, 11$  次まで有限和関数  $S_N(x)$  の区間  $[-4, 4]$  でのグラフ。(b) 有限和関数  $S_{61}(x)$  のグラフ。 $-\pi, 0, \pi$  での不連続点以外の連続な定数区間は次数  $N$  を大きくすると誤差の広がり減少して定数  $-1$  および  $1$  に収束していくことが期待できる。しかしながら、不連続点の近傍では近似次数  $N$  を上げたとしても有限和である限り、overshoot の大きさは小さくならず、Gibbs 現象が観察される。

演習 2.25 Mathematica をつかって、周期区間  $[-\pi, \pi)$  の矩形波の Fourier 級数の有限和  $S_N(x)$  のグラフを描いてみなさい。また、 $N$  を大きくしても overshoot がなくなることを観察してみなさい。

(ヒント)

```
f[x_] := Piecewise[{{-1, -Pi <= x && x < 0}, {1, 0 <= x && x < Pi}}] (* 矩形波
の定義 *)
fs[x_, n_] := FourierSinSeries[f[x], x, n] (* n 次 Fourier Sine 級数を返す関数 *)
f3[x_] = fs[x, 3];
f5[x_] = fs[x, 5];
f7[x_] = fs[x, 7];
f9[x_] = fs[x, 9];
f11[x_] = fs[x, 11];
Plot[{f[x], f3[x], f5[x], f7[x], f9[x], f11[x]}, {x, -4, 4}] (* 近似部分級数を
重ねてプロット *)
```

一般に矩形波を周期区間  $[0, T)$  で

$$f_T(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < T/2 \\ 0 & T/2 \leq x < T \end{cases}$$

と定義した場合、その Fourier 係数は次のようになる。

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_n &= 0, \quad (n \neq 0), \\ b_n &= \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \frac{2}{\pi n}, & n = 2k + 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

これより、Fourier 級数は

$$S[f_T] = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{2\pi(2k+1)}{T} x$$

となる。

演習 2.26  $f_T(x)$  の Fourier 級数を実際に計算してみなさい。

(ヒント) 補題 2.12 に注意して、周期  $2a$  を持つ関数の Fourier 係数の (2.18) と (2.19) を使う ( $a = T/2$ )。

### 2.7.3 のこぎり波

区間  $[-\pi, \pi)$  上の関数

$$f(x) = x, \quad -\pi \leq x < \pi \tag{2.30}$$

を周期拡張して、 $\{\pm(2k+1)\pi\}_{k=0,1,\dots}$  に不連続点をもつ周期関数をのこぎり波 (sawtooth wave) という。のこぎり波は奇関数であるので Fourier 正弦級数を持つ。

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nt \, dt = \frac{2 \cos n\pi}{n} \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned} \quad (2.31)$$

これより、Fourier 級数として次を得る (図 2.13)。

$$S[f] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

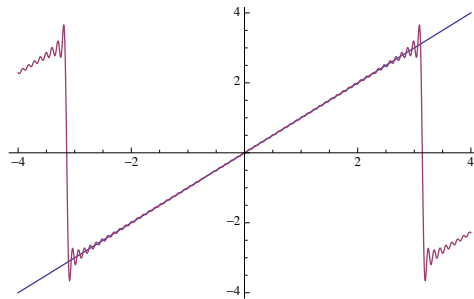


図 2.13 区間  $[-\pi, \pi)$  で定義されたのこぎり波の Fourier 級数の 60 次有限和  $S_{N=60}[f]$  で近似した関数の区間  $[-4, 4]$  でのグラフ。図 2.12 と同様に、不連続点  $-\pi, \pi$  の近傍では近似次数に関わらず有限和の範囲では誤差の大きさは小さくならず overshoot を持つ Gibbs 現象が観察される。

演習 2.27 Mathematica をつかって、周期区間  $[-\pi, \pi)$  ののこぎり波の Fourier 級数の有限和  $S_{N=60}[f]$  のグラフ図 2.13 を描いてみなさい。

## 2.8 Gibbs 現象の解析

次の周期  $2\pi$  の奇関数に周期拡張できる  $[-\pi, \pi)$  上の原点で不連続な逆のこぎり関数<sup>\*1</sup>

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & 0 \leq x < \pi \\ -\pi - x & \pi \leq x < 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

を考え (図 2.14) Gibbs 現象を具体的に評価してみよう。節 2.4 の Dirichlet 核の漸近評価や節 2.5 の積分正弦関数を使う例になっている。

<sup>\*1</sup> 逆のこぎり波というのは、のこぎり波と原点を通過する傾きが逆であるからという理由に過ぎない。

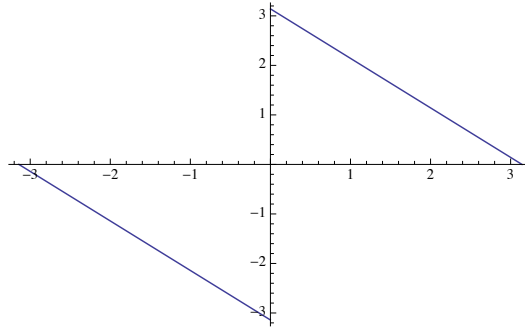


図 2.14 区間  $[-\pi, \pi)$  上の  $x = 0$  で不連続点を持つ逆のこぎり関数。奇関数で、 $\{2\pi n\}_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots}$  に不連続点を持つ周期  $2\pi$  の周期関数逆のこぎり波に拡張できる。

$f$  は奇関数であることから、Fourier 係数は正弦係数  $b_k$  だけを持ち

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin kx dx \\ &= \frac{2}{k} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $f$  の Fourier 級数はつぎのようになる：

$$S[f] = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

Dirichlet 核の (2.25) から、 $N$  項までの Fourier 級数の部分 and  $S_N(x)$  の微分は

$$S'_N(x) = 2\pi D_N(x) - 1$$

となることに注意すると

$$S_N(x) = \int_0^x (2\pi D_N(t) - 1) dt = \int_0^x \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} dt - x$$

と表される。

さて、区間  $[0, \pi)$  上で部分 and  $S_N(x)$  と  $f(x)$  との差を  $g_N(x)$  とすると

$$g_N(x) = S_N(x) - (\pi - x) = 2\pi \int_0^x D_N(t) dt - \pi$$

である。 $g'_N(x) = 2\pi D_N(x)$  に注意すると、 $g_N(x)$  の極値集合  $\{\mu_N \mid g'_N(\mu_N) = 0\}$  において  $x = 0$  の右側にある最初の極値は

$$\mu_N^1 = \frac{\pi}{N + \frac{1}{2}}$$

である。 $\lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot \mu_N^1 = \pi$  であることに注意しておく。

以下では、十分大きな  $N$  における  $f(x)$  からの overshoot  $g_N(x)$  で、特に  $x \rightarrow 0+$  に向かうときの値、たとえば  $g_N(\mu_N^1)$  を求めることを目的としよう。

## 補題 2.28

$$\int_0^x \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} dt = 2 \int_0^x \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{t} dt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad N \rightarrow \infty.$$

証明 既に、この関係は積分正弦関数の性質を述べた定理 2.22 の証明の中で、Riemann-Lebesgue の補題を使って証明している。

$d(x) = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} - \frac{2}{x}$  とおいて ( $d(0) = 0$  と定める) 部分積分を使って、区間  $[0, \pi)$  で  $d(x)$  は  $C^1$  級の関数であることから

$$\int_0^x d(x) \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad N \rightarrow \infty$$

を得る。心配なら、 $|x| < \pi$  に対する Bernoulli 数  $B_n$  \*2 を使ったべき級数展開

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{2n} - 2)B_n x^{2n}}{(2n)!},$$

から、形式的に次の級数が得られる：

$$d(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{2n} - 2)B_n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}}{(2n)!} = \frac{1}{6} \cdot \frac{x}{2} + \frac{7}{360} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{31}{15120} \left(\frac{x}{2}\right)^5 + \dots$$

これから  $d(0) = 0$  であることが確かめられ、部分積分を具体的に実行できる。 ■

したがって、部分和の漸近形は

$$S_N(x) = 2 \int_0^x \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{t} dt - x + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad N \rightarrow \infty.$$

と書くことができ、次の補題を得る。

補題 2.29  $N \rightarrow \infty$  で  $S_N(x)$  は区間  $(0, \pi)$  で  $f(x)$  に収束する：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = f(x), \quad 0 < x < \pi.$$

証明

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} 2 \int_0^x \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{t} dt - x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N + \frac{1}{2}}{N} \int_0^{(N + \frac{1}{2})x} \frac{\sin t}{t} dt - x \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt - x = 2 \cdot \text{Si}(\infty) - x \end{aligned}$$

\*2 Bernoulli 数  $B_n$  は

$$B_n = \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2n}} = \frac{(2n)!}{(2^{2n-1} - 1)\pi^{2n}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{r^{2n}} = \frac{2(2n)!}{(2^{2n} - 1)\pi^{2n}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^{2n}}$$

で定義される。  $B_n$  はすべて正の有理数で、分母は  $p-1$  が  $2n$  の約数となるような素数  $p$  の積である。  $B_1 = 1/6$ ,  $B_2 = 1/30$ ,  $B_3 = 1/42$ ,  $B_4 = 1/30$ ,  $B_5 = 5/66$ ,  $B_6 = 691/2730$ ,  $B_7 = 7/6$ ,  $B_8 = 3617/510$ ,  $B_9 = 43867/798$  などである。

$\text{Si}(x)$  は節 2.5 (40 ページ) で取り上げた積分正弦関数で、 $\text{Si}(\infty) = \frac{\pi}{2}$  を使って結果を得る。 ■

さて、問題としている  $x \rightarrow 0+$  での  $g_N(x)$  の挙動を調べて、overshoot  $g_N(x_N)$  の値を求めてみよう。  
 $g_N(x)$  の漸近形

$$g_N(x) = S_N(x) - (\pi - x) = 2 \int_0^x \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{t} dt - \pi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad N \rightarrow \infty.$$

において、補題 2.28 の議論から次のことが明らかになった：

$$\sup_{0 \leq x < \pi} g_N(x) = 2 \sup_{0 \leq t < \infty} \text{Si}(t) - \pi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad N \rightarrow \infty.$$

これより、定理 2.22 の積分正弦関数の性質 (iv) を使って

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x < \pi} g_N(x) = 2 \cdot \text{Si}(\pi) - \pi = 0.562281$$

がわかった。この結果は、以下のようにしてさらに精密化できる。

$N \rightarrow \infty$  を  $N \cdot x_N = \pi$  であるように極限を取ると、次のようにして  $x_N \rightarrow 0+$  での overshoot  $g_N(x_N)$  を求めることができる (図 2.15)。

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N \cdot x_N = \pi}} g_N(x) &= 2 \int_0^x \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{t} dt - \pi \\ &= 2 \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt - \pi \\ &= 2 \cdot \text{Si}(\pi) - \pi = 0.562281 \end{aligned}$$

したがって、この結果は先に注意したように  $x = 0$  の右側にある  $g_N(x)$  の最初の極値  $\mu_N^1$  ( $\lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot \mu_N^1 = \pi$  を満たしている) における  $f(x)$  からの overshoot が最大であることを示している。

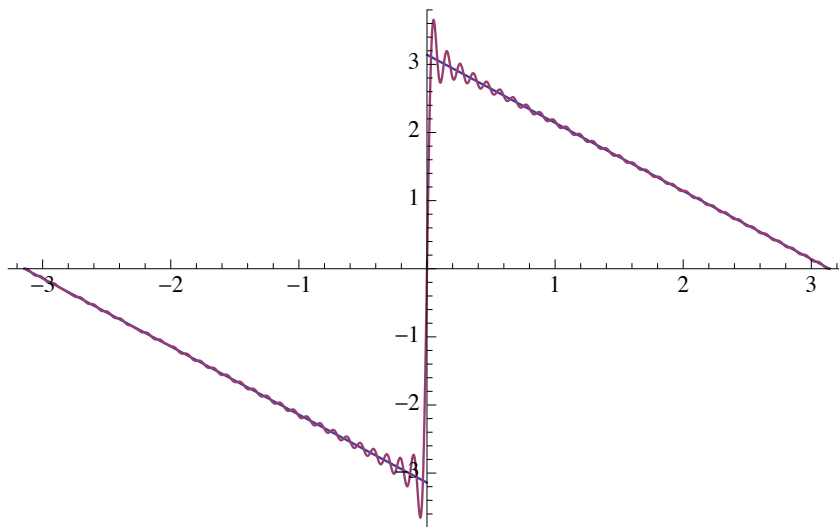


図 2.15 逆のこぎり波の Fourier 級数の有限和  $S_{N=60}[f]$  のグラフ。  $N$  をいくら大きくしても有限和  $S_N$  であるかぎり、 $x = 0$  の近傍で Gibbs 現象が生じている。元の関数値からの揺らぎは  $x = 0$  の右側 (左側) にある最初の局所極大値 (極小値) が最大の overshoot であることがわかる。



以上の議論をまとめると次の定理を得る。

**定理 2.30** (逆のこぎり波の Gibbs 現象) (2.32) で定義される区間  $[-\pi, \pi)$  上の逆のこぎり波  $f$  の Fourier 級数の  $N$  次有限和  $S_N(x)$  を考え、元の関数値  $f(x)$  からの overshoot 関数を  $g_N(x) = S_N(x) - f(x)$  と定義する。このとき次がなりたつ。

- (i) 区間  $(0, \pi)$  で  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = f(x)$ .
- (ii) 有限和  $S_N$  である限り、どんな大きな  $N$  であっても overshoot は残る。ただし、overshoot 幅は  $N$  が大きくなるほど狭くなる。
- (iii)  $\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} g_N(x) = 2 \cdot \text{Si}(\pi) - \pi$ ,  $0 \leq x < \pi$ .
- (iv) 不連続点に向かう  $x \rightarrow 0+$  において overshoot は  $\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N \cdot x_N = \pi}} g_N(x_N) = 2 \cdot \text{Si}(\pi) - \pi = 0.562281$

**演習 2.31** Mathematica で、図 2.15 の Gibbs 現象を呈するグラフを描きなさい。

## 2.9 Fourier 級数の収束性

### 2.9.1 Fourier 級数の $L^2$ 収束性

節 2.8 の Gibbs 現象の解析でもみたように、与えられた関数の Fourier 級数の収束については明らかなことではない。しかしながら、次の Riemann–Lebesgue の補題から、区分的に連続な関数  $f$  についてその高次の Fourier 係数は小さくなり、その絶対値において任意の正数より大きい Fourier 係数は有限個だけであることがわかる。

**定理 2.32** (Riemann–Lebesgue の補題) 有界区間  $I = [a, b]$  で可積分であるような関数  $f$  について

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos kx \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin kx \, dx = 0. \quad (2.33)$$

**証明** 区間  $I$  の任意の細分区間  $I_k$  について  $m_k = \inf_{x \in I_k} f(x)$ ,  $M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$  として、区間  $I$  の分割  $\Delta$  の不足和  $s_\Delta$  および過剰和  $S_\Delta$  を次で定義する。

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^m m_i |I_i|, \quad S_\Delta = \sum_{i=1}^m M_i |I_i|.$$

$f$  が可積分であるので、有界  $|f(x)| \leq M(x \in I)$ 。また、任意の  $\epsilon > 0$  に対して  $\delta > 0$  が存在して、 $|\Delta| < \delta$  であるような分割  $\Delta$  について

$$0 \leq S_\Delta - s_\Delta < \frac{\epsilon}{2}$$

が成立している。このような分割  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$  を 1 つ定めて、右辺第 1 式を次のように評価しよう (第 2 式についても全く同様に評価できる)。

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \cos kx \, dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_i)) \cos kx \, dx \right| + \left| \sum_{i=1}^m f(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos kx \, dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) + M \sum_{i=1}^m \frac{1}{k} |\sin kx_i - \sin kx_{i-1}| \\ &\leq (S_\Delta - s_\Delta) + \frac{2mM}{k} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{2mM}{k} \end{aligned}$$

が成立。 $\Delta$  を 1 つ定めているので、 $m$  は一定。したがって、 $k_0 = \lceil \frac{4mM}{\epsilon} \rceil$  とおくと、 $k \geq k_0$  に対して

$$\left| \int_a^b f(x) \cos kx \, dx \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

となり、結果を得る。

直感的な証明として次のようにも考えられる。 $k$  が大きくなると  $\cos / \sin kx$  は関数  $f$  よりも激しく振動することになり、その隣接周期にわたる積分は  $x$  軸の上下で打ち消し合って小さくなる。微分可能な区分的区間の和として積分を考え、区間  $I$  での  $f$  の有界性を考慮すると

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \cos kx \, dx &= \left[ \frac{\sin kx}{k} f(x) \right]_a^b - \int_a^b \frac{\sin kx}{k} f'(x) \, dx \\ &= \frac{1}{k} \left( (f(b) \sin kb - f(a) \sin ka) - \int_a^b f'(x) \sin kx \, dx \right) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

■

### 2.9.2 関数の連続点における Fourier 級数の収束性

周期  $2\pi$  を持つ関数  $f$  の Fourier 級数の部分 and  $S_N(x)$

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

を考える。ここで、Fourier 係数は (2.10) および (2.11) のように、次で定義されている。

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k \geq 0, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx. \end{aligned}$$

**定理 2.33** (連続点における Fourier 級数の収束) 周期  $2\pi$  を持つ連続関数  $f$  について、導関数が定義される各点  $x$  でその Fourier 級数は  $f(x)$  に収束する。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \lim_{N \rightarrow \infty} (a_N \cos Nx + b_N \sin Nx)$$

証明 定理の前提のもとで、 $N \rightarrow \infty$  のとき部分和  $S_N(x) \rightarrow f(x)$  を示す。

Foueir 係数の定義を代入して、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \cdot \cos kx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt dt \cdot \sin kx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos k(t-x) dt \right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(t-x) dt \end{aligned}$$

ここで、 $D_N(x)$  は (2.24) の Dirichlet 核

$$D_N(x) = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{2\pi \sin \frac{x}{2}}$$

である。結局、変数を取り替えて  $u = t - x$  とすれば、部分和  $S_N(x)$  は次のように与えられる。

$$S_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_N(t) dt. \quad (2.34)$$

さて、(2.26)、つまり

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$$

を使って

$$\begin{aligned} S_N(x) - f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{\sin \frac{t}{2}} \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t dt \end{aligned}$$

を評価しよう。関数

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{f(x+t) - f(x)}{\frac{t}{2}} \frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$$

は区間  $[-\pi, \pi]$  で不連続点の候補は  $t = 0$  だけであり、 $t = 0$  で連続、 $g(0) = 2f'(x)$  である ( $\lim_{t \rightarrow 0} t/\sin t = 1$  を使う)。したがって、Riemann-Lebesgue の補題 2.32 が適用でき、

$$S_N(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) D_N(t) dt \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

■

## 2.9.3 関数の不連続点における Fourier 級数の収束性

いままでも記法として使ってきたが、関数の右（左）極限值および右（左）微分を定義しておこう。

**定義 2.34** 点  $x$  での関数  $f$  の右極限值  $f(x+0)$  および左極限值  $f(x-0)$  を次のように定義する。

$$f(x+0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h)$$

$$f(x-0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} f(x-h)$$

さらに、次の極限值

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x-0) - f(x-h)}{h}$$

が存在するとき、 $f$  が  $x$  で右微分可能および左微分可能といい、それぞれ  $f'(x+0)$  および  $f'(x-)$  と書く（ $x$  で微分可能とは  $f(x+0) = f(x-)$  のときである）。

**例 2.35** 節 2.7.3 で取り上げたのこぎり波、区間  $[-\pi, \pi)$  で定義された関数  $x$  を周期拡張した  $f(x)$  の不連続点  $x = \dots, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$  において、 $f(\pi-0) = \pi$ ,  $f'(\pi-0) = 1$  および  $f(\pi+0) = -\pi$ ,  $f'(\pi+0) = 1$ 。

節 2.6.1 の区間  $[0, \pi)$  上の三角波は  $x = \frac{\pi}{2}$  で連続であるが微分不可能で、 $f'(\frac{\pi}{2}-0) = 1$  および  $f'(\frac{\pi}{2}+0) = -1$ 。

**定理 2.36** (不連続点における Fourier 級数の収束) 周期  $2\pi$  を持つ区分的に連続な関数で、点  $x$  で右および左微分可能であるとき、 $f$  の  $x$  での Fourier 級数は値  $F(x)$

$$F(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

に収束する。点  $x$  で連続のときには定理 2.33 に一致する。

**証明** 定理 2.33 の証明と同様に進めるのだが、Dirichlet 核  $D_N(x)$  の積分について

$$\int_0^\pi D_N(u) du = \int_{-\pi}^0 D_N(u) du = \frac{1}{2}$$

に注意する。

部分和  $S_n(x)$  は (2.34) と表されるのだが、 $N \rightarrow \infty$  において、

$$\int_{-\pi}^\pi f(t+x) D_N(t) dt \rightarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad N \rightarrow \infty \quad (2.35)$$

を示そう。(2.35) を示すために、次の 2 式を示せばよい。

$$\int_0^\pi f(t+x) D_N(t) dt \rightarrow \frac{f(x+0)}{2},$$

$$\int_{-\pi}^0 f(t+x) D_N(t) dt \rightarrow \frac{f(x-0)}{2}.$$

このことは、定理 2.33 の証明と同じようにして、 $N \rightarrow \infty$  の極限で

$$\int_0^\pi (f(t+x) - f(x+0))D_N(t) dt \rightarrow 0, \quad (2.36)$$

$$\int_{-\pi}^0 (f(t+x) - f(x-0))D_N(t) dt \rightarrow 0 \quad (2.37)$$

を示すことに帰着される。(2.36) は、Dirichlet 核の定義にもどって

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{f(x+u) - f(x+0)}{\sin \frac{u}{2}} \right) \sin \left( N + \frac{1}{2} \right) u du \rightarrow 0$$

である。この極限は Riemann–Lebesgue の補題 2.32 の適用の妥当性によって示される。積分の括弧内の  $u$  は正値であるので、括弧の表式が右連続 ( $u \rightarrow 0+$  で右極限を持つ) であることがわかればよい。仮定から  $f$  は右微分可能であることから、先の定理における極限の議論と同じことを繰り返えることができ、0 に収束することが示される。(2.37) についても同様である。したがって、定理が証明された。 ■

例 2.37 節 2.7.3 で取り上げた区間  $[-\pi, \pi)$  上の関数  $f(x) = x$  を周期拡張して得られる不連続関数 (ノコギリ波)  $f$  を考える。 $f(\pi+0) = -\pi, f(\pi-0) = \pi$  であるので、 $S_{N \rightarrow \infty}(\pm\pi) = 0$  である。

#### 2.9.4 Fourier 級数の一様収束性

Fourier 級数の一様収束性を議論するために、関数の一様収束の定義 1.29 を再度述べておこう。関数列  $\{F_n\}$  が関数  $F$  に区間  $[a, b]$  で一様収束 (uniform convergence) するとは、 $\forall \varepsilon > 0$  に対して、どんな  $x \in [a, b]$  についても、ある整数  $N = N(\varepsilon)$  が存在して、全ての  $n \geq N$  について  $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$  が成立することである。 $N$  は  $\varepsilon$  だけに依存し、 $x$  には依存しない。同様にして、 $f(x)$  の Fourier 級数が  $f(x)$  に一様収束するとは

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

が  $N \rightarrow \infty$  で  $f(x)$  に一様収束することである。

節 2.6.1 でとりあげた連続三角波は一様収束するように観察された。一方、節 2.7.3 のノコギリ波は一様収束しない。不連続点に近づくとつれて、もとの関数値になるためには十分大きな部分和を取らねばならなかった (しかも Gibbs 現象を呈した)。

定義 2.38 (区分的に滑らかな関数) 関数が区分的に滑らか (piecewise smooth) とは、区分的に連続でその導関数が連続であるときである

注意 2.39 任意の閉有限区間では、区分的に滑らかな関数は有限個の不連続点な角を持つことができ、そこでは左右導関数が存在しても等しい必要はない。そうした点を除けば関数は連続微分可能である。周期  $2\pi$  を持つノコギリ波はその導関数とも  $\pm n\pi, n \in \mathbb{Z}$  で不連続であるが、それ以外での点では連続微分可能であるため、次の定理 2.40 は適用できない。一方、連続三角波は連続かつ区分的に滑らかな関数で、 $\pm n\pi/2, n \in \mathbb{Z}$  で角がありそこでの導関数は不連続となる。定理 2.40 が適用される。

定理 2.40 区間  $[-a, a]$  上の周期  $2a$  を持つ連続で区分的に滑らかな関数  $f(x)$  の Fourier 級数は  $f(x)$  に一様収束する。

証明 仮定を単純化して  $f$  がどこでも 2 回微分可能として定理を証明する。また、区間  $[-\pi, \pi]$  としても一般性を失わない。

$f$  と  $f''$  の Fourier 級数が

$$f(x) = \sum_n a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

$$f''(x) = \sum_n a_n'' \cos nx + b_n'' \sin nx$$

のとき、その Fourier 係数は

$$a_n = -\frac{a_n''}{n^2}, \tag{2.38}$$

$$b_n = -\frac{b_n''}{n^2} \tag{2.39}$$

の関係にあることに注意する。実際、たとえば

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ &= f(x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin nx}{n} \, dx \\ &= -\frac{b_n'}{n} \quad (b_n' \text{ は } f' \text{ の Fourier 正弦係数}) \\ &= f'(x) \frac{\cos nx}{n^2 \pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \, dx \\ &= -\frac{a_n''}{n^2} \end{aligned}$$

である。 $f''$  が連続であれば、Riemann-Lebesgue の補題 2.32 より、 $a_n'', b_n''$  は  $n \rightarrow \infty$  で 0 に収束する。つまり、 $|a_n''|, |b_n''|$  はある  $M$  によって上から押さえられている。したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n''| + |b_n''|}{n^2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M + M}{n^2} = 2M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

である ( $\int_1^{\infty} dx/x^2$  が有限であることから  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$  も有界)。したがって、次の補題から、証明を終える。

■

補題 2.41 関数  $f(x)$  の Fourier 級数

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

において、

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| < +\infty$$

ならば、Fourier 級数は  $f(x)$  に一様かつ絶対収束する。

証明

$$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq |a_k| + |b_k|$$

に注意する。よって、 $f$  の Fourier 級数の  $x$  での収束性は  $\sum_k |a_k| + |b_k|$  の収束性によって支配される。 $F(x)$  と部分和

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

との差

$$F(x) - S_N(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

はすべての  $x$  について

$$|F(x) - S_N(x)| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| + |b_k|$$

であり、補題の仮定より  $N$  を十分に大きく取れば右辺はいくらでも小さくできる。つまり、任意の  $\varepsilon > 0$  について、 $N_0$  が存在して、 $N > N_0$  について

$$|F(x) - S_N(x)| < \varepsilon, \quad N > N_0.$$

ここで、 $N_0$  は  $x$  によらずに  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \cos kx + b_k \sin kx|$  の収束性だけに依存する。したがって、 $S_N(x)$  の収束は一様である。これで、定理 2.40 の証明も終わった。 ■

### 2.9.5 Fourier 級数の $L^2$ 収束性 (平均収束性)

$f$  が連続でないときは Fourier 級数が各点収束せず、不連続点では左右の極限値の平均に収束する。Fourier 級数が一様収束しないときでも、 $L^2$  などの弱い意味での収束はあり得る。

補題 2.42  $f$  が  $L^2([-\pi, \pi])$  の要素とし、

$$V_N = \text{span}\{1, \cos kx, \sin kx\}_{1 \leq k \leq N}$$

とする。 $f$  の Fourier 係数  $a_k, b_k$  を使って

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

としたとき、 $f_N$  は  $V_N$  の要素であって、 $L^2$  ノルムの意味で  $f$  を最良近似する。つまり

$$\|f - f_N\|_{L^2} = \min_{g \in V_N} \|f - g\|.$$

証明  $f_N$  は空間  $V_N$  への直交射影であることに注意すると、射影定理 1.52 の証明から  $f_N$  は  $f$  の最良近似であることがわかる。 ■

補題 2.43  $L^2([-\pi, \pi])$  の関数は滑らかな周期  $2\pi$  持つ周期関数によっていくらでも良く近似できる。

証明  $L^2([-\pi, \pi])$  の関数  $f$  は一般に不連続関数で、周期拡張しても図 2.16(a) のように不連続関数である。 $f$  の連続成分を不連続点  $x = c$  を内部に含む微少区間  $(c - \epsilon, c + \epsilon)$  でうまくつないだ滑らかな関数  $g(x)$  で、図 2.16(b) のように、 $f$  と  $g$  とは区間  $(c - \epsilon, c + \epsilon)$  を除いて一致するようにできる。接続区間  $(c - \epsilon, c + \epsilon)$  を狭くすることによって、滑らかな連続関数  $g$  は  $L^2([-\pi, \pi])$  の意味で  $f$  にいくらでも近づくことができる。 ■

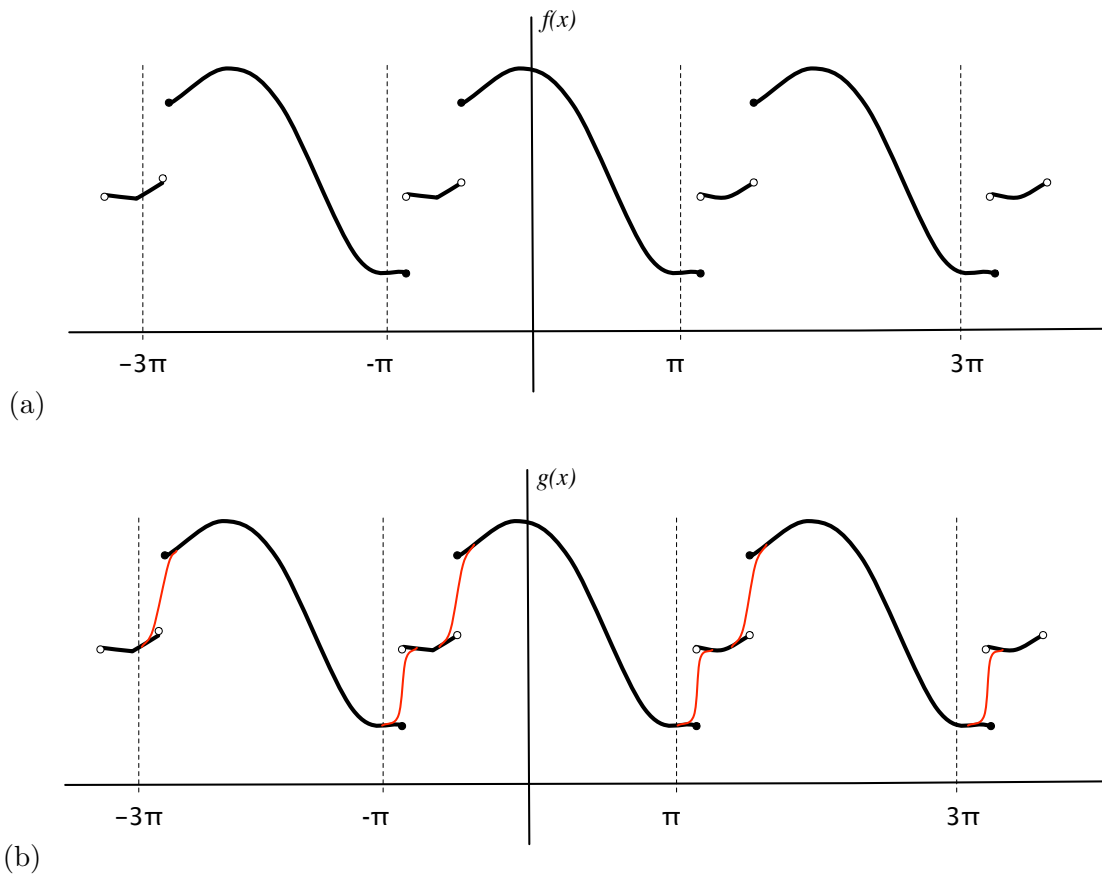


図 2.16 (a)  $[-\pi, \pi]$  上で不連続点を持つ関数  $f(x)$  を周期拡張する (b) 不連続点を含む微少区間で滑らかなにつないで  $g(x)$  として全区間で滑らかな連続関数とできる。したがって、接続区間を狭くすることによって、 $f$  を滑らかな関数  $g$  によって近似できる。



定理 2.44  $f$  を  $L^2([-\pi, \pi])$  の要素とする。 $f$  の Fourier 係数  $a_k, b_k$  を使って

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

としたとき、または、複素形式の Fourier 係数を

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

を使って

$$f_N(x) = \sum_{k=-N}^N \alpha_k e^{ikx}$$

としたとき、 $f_N$  は  $L^2([-\pi, \pi])$  の意味で  $f$  に収束する。つまり

$$\|f - f_N\|_{L^2} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

証明  $f \in L^2([-\pi, \pi])$  と仮定する。このとき、補題 2.43 より、任意の  $\epsilon > 0$  に対して、滑らかな周期関数  $g$  をとって

$$\|f - g\|_{L^2} < \epsilon \tag{2.40}$$

とできる。

$g$  の Fourier 係数  $c_k, d_k$  を使って  $V_n$  内の関数を

$$g_N(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^N c_k \cos kx + d_k \sin kx$$

とする。定理 2.40 より、十分大きな  $N_0$  を選んで、 $\forall x \in [-\pi, \pi]$  と  $N > N_0$  に対して  $|g(x) - g_N(x)| < \epsilon$  とできる。

$$\begin{aligned} \|g - g_N\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - g_N(x)|^2 dx \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \epsilon^2 dx = 2\pi\epsilon, \quad N > N_0, \end{aligned}$$

および、(2.40) から

$$\begin{aligned} \|f - g_N\| &\leq \|f - g\| + \|g - g_N\| \quad \text{三角不等式} \\ &< \epsilon + \sqrt{2\pi}\epsilon, \quad N > N_0. \end{aligned}$$

一方、補題 2.42 の  $f_N$  は  $f$  の  $V_N$  での最良近似であることから

$$\begin{aligned} \|f - f_N\| &\leq \|f - g_N\| \\ &\leq (1 + \sqrt{2\pi})\epsilon, \quad N > N_0. \end{aligned}$$

■

次の Parseval の等式は Fourier 基底の完全性（全体性）に関して定理 1.69 で登場している。

定理 2.45 (Parseval の等式) 区間  $[-\pi, \pi]$  上の関数  $f$  の Fourier 級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

が  $L^2([-\pi, \pi])$  であるとき、

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = |a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2. \quad (2.41)$$

複素形式では、区間  $[-\pi, \pi]$  上の関数  $f$  の Fourier 級数

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx}$$

が  $L^2([-\pi, \pi])$  であるとき、

$$\frac{1}{2\pi} \|f(x)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2. \quad (2.42)$$

または、 $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$  のとき

$$\frac{1}{2\pi} \langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)g(x) dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k^* \beta_k. \quad (2.43)$$

証明 (2.43) を示せば十分である。 $f, g$  の Fourier 部分和を

$$f_N(x) = \sum_{k=-N}^N \alpha_k e^{ikx}, \quad g_N(x) = \sum_{k=-N}^N \beta_k e^{ikx}$$

とする。定理 2.44 より、 $N \rightarrow \infty$  のとき  $L^2([-\pi, \pi])$  の意味で  $f_N \rightarrow f, g_N \rightarrow g$  である。

$$\begin{aligned} \langle f_N | g_N \rangle &= \left\langle \sum_{k=-N}^N \alpha_k e^{ikx} \left| \sum_{k=-N}^N \beta_k e^{ikx} \right. \right\rangle = \sum_{k=-N}^N \sum_{\ell=-N}^N \alpha_k^* \beta_\ell \langle e^{ikx} | e^{i\ell x} \rangle \\ &= 2\pi \sum_{k=-N}^N \alpha_k^* \beta_k \end{aligned}$$

より、(2.43) を示すには

$$\langle f_N | g_N \rangle \rightarrow \langle f | g \rangle, \quad N \rightarrow \infty$$

を示せばよい。

$$\begin{aligned} |\langle f | g \rangle - \langle f_N | g_N \rangle| &= |(\langle f | g \rangle - \langle f | g_N \rangle) + (\langle f | g_N \rangle - \langle f_N | g_N \rangle)| \\ &\leq |\langle f | g - g_N \rangle| + |\langle f - f_N | g_N \rangle| \\ &\leq \|f\| \cdot \|g - g_N\| + \|f - f_N\| \cdot \|g_N\| \quad \text{Schwartz の不等式より} \end{aligned}$$

であることに注意し、 $L^2([-\pi, \pi])$  の意味で  $\|f_N - f\| \rightarrow 0, \|g - g_N\| \rightarrow 0$  から、右辺は  $N \rightarrow \infty$  で 0 となる。 ■

注意 2.46 直交基底  $\{e_n\}_{n=1,\dots,N}$  を持つ有限時限部分空間  $V_N$  への直交射影で定まる  $f$  の展開係数  $\{\langle e_n | f \rangle\}$  について成立する Bessel の不等式 (1.16) は、(2.42) の部分和を取れば明らかに成立する：

$$\sum_{k=-N}^N |\alpha_k|^2 \leq \|f\|^2.$$

例 2.47 節 2.7.3 の区間  $[-\pi, \pi)$  上の関数  $f(x) = x$  を周期拡張したノコギリ波は Fourier 余弦係数のみ (2.31) を持つ：

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

また

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2,$$

および

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

である。したがって (2.41) を使うと、Riemann の zeta 関数  $\zeta(s)$  の特殊値  $s = 2$  に対する Euler の Basel 等式 (1735 年)

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

が得られる。

## 第3章

# Fourier 変換

### 3.1 Fourier 変換と反転公式

定義 3.1 実数  $\mathbb{R}$  上の関数が  $L^1$ 、または絶対可積分（絶対 Lebesgue 可測）であるとは

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty \quad (3.1)$$

であるときである。

定義 3.2 (Fourier 変換)  $\mathbb{R}$  上で定義された区分的に連続、かつ絶対可積分な(複素)関数  $f(x)$  の Fourier 変換 (Fourier transformation) を

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \quad (3.2)$$

で定義する。

注意 3.3  $|f(x)e^{-i\lambda x}| = |f(x)|$  であるので (3.2) は絶対収束する。したがって、 $\hat{f}(\lambda)$  は任意の  $-\infty < \lambda < \infty$  に対して定義され、かつ

$$|\hat{f}(\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

である。

例 3.4 関数  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$  の Fourier 変換を計算する。この関数は、積分正弦関数  $\text{Si}(x)$  の性質 2.22 で関数値  $\text{Si}(\infty) = \frac{\pi}{2} = 1.5708$  を求めるための別法として登場している。

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{-i\lambda\sqrt{2\pi}} [e^{-i\lambda x}]_{-1}^1 = \frac{1}{-i\lambda\sqrt{2\pi}} (e^{-i\lambda} - e^{i\lambda}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda}{\lambda}. \end{aligned}$$

例 3.5 関数  $f(x) = \begin{cases} e^{-kx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$  の Fourier 変換を計算する。

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-kx} e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(k+i\lambda)x} dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}(k+i\lambda)} \left[ e^{-(k+i\lambda)x} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(k+i\lambda)}. \end{aligned}$$

定理 3.6 区分的に連続で、絶対可積分な関数  $f(x)$  の Fourier 変換  $\hat{f}(\lambda)$  は有界な連続関数である。

証明  $f(x)$  は絶対可積分であることから、先の注意のように、 $\hat{f}(\lambda)$  の有界性は明らか。

$\hat{f}(\lambda)$  の連続性を示そう。 $\hat{f}(\lambda)$  の有界性から、十分大きな  $\ell$  を取ると、任意の  $\lambda$  に対して

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| \geq \ell} f(x) e^{-i\lambda x} dx \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\ell} f(x) e^{-i\lambda x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\ell}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \right| < \epsilon$$

であるので、

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\lambda + \Delta\lambda) - \hat{f}(\lambda)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(\lambda + \Delta\lambda)x} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \right| \\ &< 2\epsilon + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\ell}^{\ell} f(x) [e^{-i(\lambda + \Delta\lambda)x} - e^{-i\lambda x}] dx \right|. \end{aligned}$$

平均値の定理から

$$e^{-i(\lambda + \Delta\lambda)x} - e^{-i\lambda x} = -ix\Delta\lambda e^{-i(\lambda + \theta\Delta\lambda)x}, \quad 0 < \theta < 1$$

これより

$$|\hat{f}(\lambda + \Delta\lambda) - \hat{f}(\lambda)| < 2\epsilon + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\Delta\lambda| \ell \int_{-\ell}^{\ell} |f(x)| dx$$

ここで、

$$|\Delta\lambda| < \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ell \int_{-\ell}^{\ell} |f(x)| dx \right)^{-1} \epsilon$$

ととると

$$|\hat{f}(\lambda + \Delta\lambda) - \hat{f}(\lambda)| < 3\epsilon$$

が示せた。したがって、 $\hat{f}(\lambda)$  は連続。しかも、証明の仕方から明らかなように、一様連続である。 ■

Fourier 変換の意味を考えてみよう。区間  $[-\ell, \ell]$  上の関数  $f$  の Fourier 級数を考え、 $\ell \rightarrow \infty$  としてみる。節 2.9 で議論したように、Fourier 級数の収束性は問題となるのであるが、 $f(x)$  が

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\pi x/\ell} \tag{3.3}$$

となるとき、その係数は

$$\alpha_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) e^{-n\pi x/\ell} dt$$

で与えられた。いま、 $f$  が全区間で定義されているとき、 $\ell \rightarrow \infty$  として、上の表式がどのようになるかをみてみよう。Fourier 係数を与える式を代入して、 $\lambda_n = \frac{n\pi}{\ell}$  および  $\delta\lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{\ell}$  とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) e^{-in\pi t/\ell} dt \right) e^{in\pi x/\ell} \right] = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) e^{in\pi(x-t)/\ell} dt \right] \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) e^{i\lambda_n(x-t)} dt \right] \delta\lambda \end{aligned} \quad (3.4)$$

を得る。そこで

$$F_{\ell}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) e^{i\lambda_n(x-t)} dt$$

とおくと、(3.4) の括弧 [...] 内は

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{\ell}(\lambda_n) \delta\lambda$$

と書ける。積分  $\int_{-\infty}^{\infty} F_{\ell}(\lambda) d\lambda$  を Riemann 和の極限とみなすと、(3.4) は

$$f(x) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\ell}(\lambda) d\lambda$$

であるが、 $F_{\ell}(\lambda)$  は  $\ell \rightarrow \infty$  で  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt$  に近づくことから

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right) e^{i\lambda x} d\lambda \end{aligned} \quad (3.5)$$

を得る。この積分のカッコ内

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

が  $f$  の Fourier 変換となっている。(3.5) は形式的に

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

と書ける。この表式を Fourier 反転公式 (Fourier inversion formula) という。厳密な議論、とくに  $\int_{-\infty}^{\infty} F_{\ell}(\lambda) d\lambda$  の広義積分の収束性について触れなかったが、次の定理が成立する。

定理 3.7 (Fourier 反転公式)  $f(x)$  が  $\mathbb{R}$  上で定義された区分的に滑らかで、かつ絶対可積分な関数とする。 $f(x)$  の Fourier 変換を  $\hat{f}(\lambda)$  とするとき

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\ell}^{\ell} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \quad (3.6)$$

となる。特に、 $f(x)$  が  $\mathbb{R}$  上で連続微分可能であれば、(3.6) の左辺は任意の有限区間  $a \leq x \leq b$  で  $f(x)$  に一様収束して、Fourier 反転公式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (3.7)$$

が成立する。反転公式が成立しているときには、一方の関数から他方が得られ、この意味で  $f(x)$  と  $\hat{f}(\lambda)$  は互いに等価である。 $\hat{f}(\lambda)$  を関数  $f(x)$  の周波数空間表示ということがある。

注意 3.8 この定理 3.7 は関数  $f(x)$  の Fourier 級数 (3.3) の収束性に関する定理 2.36 および定理 2.33 に対応している。つまり、 $f(x)$  が区分的に滑らかな関数であれば、その不連続点におけるその Fourier 級数について

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \alpha_n e^{in\pi x/\ell} = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

が成立するのであるが、Fourier 変換についてこれに対応するのが定理 3.7 である。

例 3.9 関数  $f(x) = \chi_{[-\pi, \pi]}(x) \cos 3x = \begin{cases} \cos 3x, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$  の Fourier 変換を計算しよう ( $\chi_I$  は区間  $I$  の特性関数)。  $f$  が偶関数であるため、

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 3x \cos \lambda x dx \\ &= \frac{\sqrt{2}\lambda \sin \lambda \pi}{\sqrt{\pi}(9 - \lambda^2)} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (\lambda \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

また、 $\hat{f}(\lambda)$  のピークが  $\lambda = \pm 3$  にあることに注意する (図 3.1(a))。この事実は、関数  $f$  が角振動数 3 で振動していることの結果である。

演習 3.10 関数  $f(x) = \chi_{[-\pi, \pi]}(x) \sin 3x = \begin{cases} \sin 3x, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$  の Fourier 変換  $\hat{f}(\lambda)$  を計算し、そのグラフ (虚数成分) を描いてその様子を説明しなさい (図 3.1(b))。  $f$  は  $\mathbb{R}$  上の連続関数であり、 $\hat{f}(\lambda) \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ ,  $(\lambda \rightarrow \infty)$  を示しなさい。

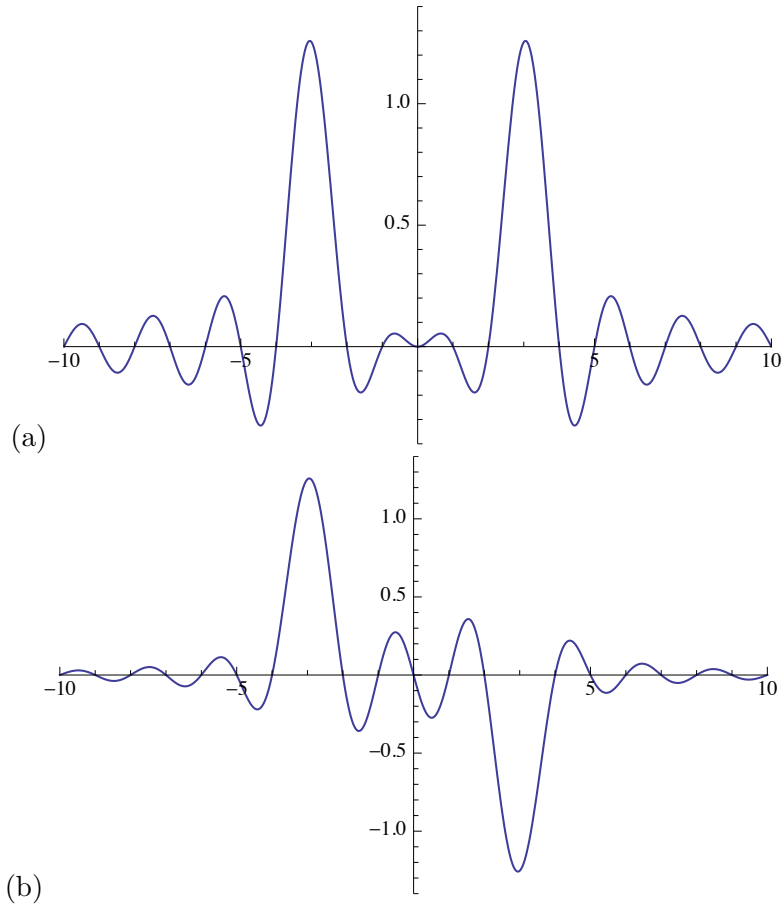


図 3.1 (a) 関数  $f(x) = \chi_{[-\pi, \pi]}(x) \cos 3x$  ( $\chi_I$  は区間  $I$  の特性関数) の Fourier 変換  $\hat{f}(\lambda)$  のグラフ。この関数は  $x = \pm\pi$  に不連続点を持つ  $\mathbb{R}$  上の不連続関数である。 $\hat{f}(\lambda)$  は  $\lambda = \pm 3$  で極大値を取るが、これは元の関数の角周波数が 3 であることの結果である。 $\hat{f}(\lambda) \sim \mathcal{O}(\frac{1}{\lambda})$ ,  $(\lambda \rightarrow \infty)$  である。  
 (b)  $f(x) = \chi_{[-\pi, \pi]}(x) \sin 3x$  の Fourier 変換  $\hat{f}(\lambda)$  のグラフ。 $\hat{f}(\lambda) \sim \mathcal{O}(\frac{1}{\lambda^2})$ ,  $(\lambda \rightarrow \infty)$  である。

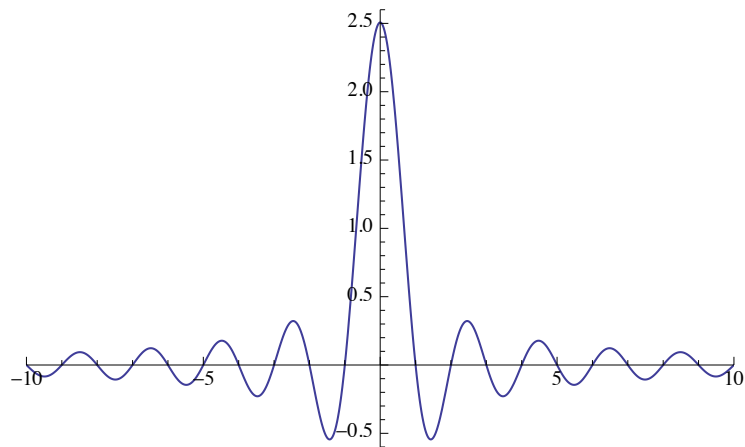


図 3.2 箱関数  $f(x) = \chi_{[-\pi, \pi]}(x)$  の Fourier 変換  $\hat{f}(\lambda)$  のグラフ。 $\hat{f}(\lambda)$  が  $\lambda = 0$  で極大値を取ることは、定数 1 を含む区間が角振動数  $\lambda = 0$  で振動している結果である。 $\hat{f}(\lambda) \sim \mathcal{O}(\frac{1}{\lambda})$ ,  $(\lambda \rightarrow \infty)$  である。



例 3.11 箱関数  $f(x) = \chi_{[-\pi, \pi]}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$  の Fourier 変換  $\hat{f}(\lambda)$  を計算しよう。この関数は

$x = \pm\pi$  に不連続点を持つ  $\mathbb{R}$  上の不連続関数である。 $f$  が偶関数であることに注意して

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{1\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{1\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \lambda x dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda \pi}{\lambda} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (\lambda \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

定数関数は周波数 0 で振動しているとみなすと、図 3.2 からわかるように、 $\hat{f}(\lambda)$  の最大値は  $\lambda$  の 0 近傍 (角周波数が 0 の近傍) であることが確認できる。

演習 3.12 箱関数  $f(x) = \chi_{[-\pi, \pi]}(x)$  の Fourier 変換において、

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \sin \lambda \pi}{\sqrt{\pi} \lambda} e^{i\lambda x} d\lambda = \begin{cases} 1, & |x| < \pi, \\ \frac{1}{2}, & x = \pm\pi, \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$

を計算で示し、不連続点  $x = \pm\pi$  における定理 3.7 の Fourier 反転公式を確認しなさい。この広義積分は絶対収束しないことに注意しよう ( $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sqrt{2} \sin \lambda \pi}{\sqrt{\pi} \lambda} \right| d\lambda = +\infty$ )

例 3.13 テント関数  $f(x) = (1 - |x|)\chi_{[-\pi, \pi]}(x) = \begin{cases} x + \pi, & |x| \leq \pi, \\ \pi - x, & 0 < x \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$  の Fourier 変換  $\hat{f}(\lambda)$  を

求めよう (図 3.3)。 $f$  は偶関数であることに注意して

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos \lambda x dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos \lambda \pi}{\lambda^2} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad (\lambda \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

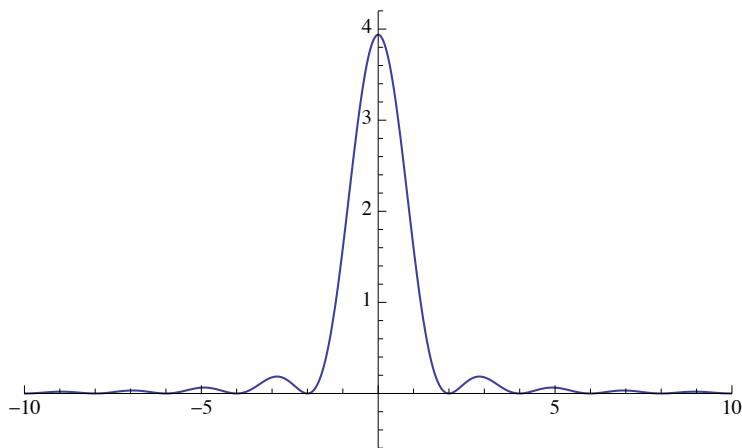


図 3.3 テント関数  $f(x) = (1 - |x|)\chi_{[-1, 1]}(x)$  の Fourier 変換  $\hat{f}(\lambda)$  のグラフ。 $\hat{f}(\lambda) \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), (\lambda \rightarrow \infty)$  である。

注意 3.14 ここで取り上げた関数の連続性に注意しよう。 $f(x) = \chi_{[-\pi, \pi]} \sin 3x(x)$ ,  $f(x) = (1 - |x|)\chi_{[-\pi, \pi]}(x)$  は  $\mathbb{R}$  上で連続で、その  $\widehat{f}(\lambda)$  は  $\lambda \rightarrow \infty$  で  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$  である。一方、 $f(x) = \chi_{[-\pi, \pi]}(x) \cos 3x$ ,  $f(x) = \chi_{[-\pi, \pi]}(x)$  は  $x = \pm\pi$  で不連続で、その Fourier 変換  $\widehat{f}(\lambda)$  は  $\lambda \rightarrow \infty$  で  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  である。

これらの事実は、節 2.6.1 の連続三角波の Fourier 係数  $a_n, b_n$  が  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$  で減衰することや、節 2.7 の不連続関数の Fourier 係数  $a_n, b_n$  が  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$  で減衰することに対応している。

## 3.2 Fourier 変換の性質



## 第 II 部

# Wavelet 解析



## 第 4 章

# Haar 関数系

例 1.40 で定義した Haar スケーリング関数  $\phi$  と Haar wavelet 関数  $\psi$  を、一般的立場から考察して、特別な性質をもつ直交関数系を構成してみよう。

### 4.1 Haar スケーリング関数と Haar wavelet 関数

#### 4.1.1 dyadic 区間

定義 4.1 スケール  $j$  の  $k$  番目の dyadic 区間  $I_{j,k}$  を次で定義する。

$$I_{j,k} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)) \quad (4.1)$$

注意 4.2 スケール  $j$  の長さ  $2^{-j}$  の dyadic 区間  $I_{j,k}$  は  $\mathbb{R}$  の分割を与えている：

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_{j,k}$$

dyadic 区間の定義から、直ちに次の補題が成立する。

補題 4.3 与えられた  $j_0, k_0, j_1 \neq j_0, k_1 \neq k_0 \in \mathbb{Z}$  について、次の (1) または (2) のどちらかが成り立つ。

- (1)  $I_{j_1, k_1} \cap I_{j_0, k_0} = \emptyset$ ,
- (2)  $I_{j_1, k_1} \subset I_{j_0, k_0}$  または  $I_{j_0, k_0} \subset I_{j_1, k_1}$

定義 4.4 あるスケール  $j$  の dyadic 区間  $I_{j,k}$  を

$$I_{j,k} = I_{j,k}^{\ell} \cup I_{j,k}^r$$

であるように、左右の細分区間を次で定義する。

$$\begin{aligned} I_{j,k}^{\ell} &= I_{j+1, 2k}, \\ I_{j,k}^r &= I_{j+1, 2k+1}. \end{aligned}$$

定義 4.5 スケール  $j$  の dyadic 階段関数  $f$  とは、 $f$  のサポートが次のように有限個の dyadic 区間

$$\text{supp } f = \bigcup_{k=k_0, \dots, k_{n-1}} I_{j,k}$$

であって、各  $I_{j,k}$  上で

$$f(x) = \text{一定}, \quad x \in I_{j,k}$$

であるような関数である。

注意 4.6  $f(x)$  がスケール  $j$  の dyadic 階段関数であれば、 $f$  はまたスケール  $j'$  ( $j' \geq j$ ) の dyadic 階段関数でもある。

#### 4.1.2 Haar スケーリング関数

例 1.40 の Haar スケーリング関数を改めて定義しておこう。

定義 4.7 (Haar スケーリング関数)

$$\phi(x) = \chi_{[0,1)}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (4.2)$$

注意 4.8 定義 4.1 の言葉をつかえば、 $\phi(x)$  は dyadic 区間  $I_{0,0}$  の端点  $x = 0, 1$  に、 $\phi(x - k)$  は区間  $I_{0,k}$  の端点  $x = k, k + 1$  に不連続点を持つ。また、 $\phi(mx)$  は dyadic 区間  $I_{0,m-1}$  上で値 1 を取る。

定義 4.9 空間  $V_0$  をスケール 0 のコンパクトサポートを持つ dyadic 階段関数 (整数上で不連続点を持つ区分的な定数関数) 全体で定義する。つまり

$$V_0 = \text{cl} \left\{ \sum_{k \in \Lambda} c_k \phi(x - k) \mid a_k \in \mathbb{R}, \Lambda \text{ は有限の整数集合} \right\} = \overline{\text{span}} \{ \phi(x - k) \}_{k \in \Lambda}.$$

演習 4.10  $4\phi(2x) + 2\phi(2x - 1) + 2\phi(2x - 2) - \phi(2x - 3)$  の様子をグラフで表しなさい。

定義 4.11 Haar スケーリング関数  $\phi(x)$  と  $\phi(x')$  の内積を次で定義する。

$$\langle \phi(x) \mid \phi(x') \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)^* \phi(t') dt$$

演習 4.12  $\{ \phi(x - k) \}_{k \in \mathbb{Z}}$  は  $V_0$  の正規直交関数系であることを示しなさい。

定義 4.13 空間  $V_j$  をスケール  $j$  のコンパクトサポートを持つ dyadic 階段関数全体、つまり

$$V_j = \text{cl} \left\{ \sum_{k \in \Lambda} c_k \phi(2^j x - k) \mid c_k \in \mathbb{R}, \Lambda \text{ は有限の整数集合} \right\} = \overline{\text{span}} \{ \phi(2^j x - k) \}_{k \in \Lambda}$$

で定義する。 $V_j$  をスケール  $j$  の近似空間 (approximate space) という。節 4.2 の Haar 関数系および節 4.3 の Haar 近似関数と詳細関数再訪で、 $V_j$  への射影演算子について改めて考える。

定義 4.14 スケール  $j$  の Haar スケーリング関数  $\phi_{j,k}$  を、dyadic 区間  $I_{j,k}$  上に値を持つ規格化  $\|\phi_{j,k}\| = 1$  された関数

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \quad (4.3)$$

として定義する。

定理 4.15 スケール  $j$  の Haar スケーリング関数系  $\{\phi_{j,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  は  $V_j$  の正規直交系である。

証明

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,k}(x) | \phi_{j,\ell}(x) \rangle_{L^2} &= \left\langle 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \mid 2^{j/2} \phi(2^j x - \ell) \right\rangle_{L^2} \\ &= 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^j t - k)^* \phi(2^j t - \ell) dt = 2^j \cdot \frac{1}{2^j} \delta_{k\ell} \\ &= \delta_{k\ell} \end{aligned}$$

■

定理 4.16  $V_0$  と  $V_j$  の要素の関係として次が成り立つ。

$$f(2^j x) \in V_j \text{ であるときに限り、 } f(x) \in V_0,$$

逆に

$$f(2^{-j} x) \in V_0 \text{ であるときに限り、 } f(x) \in V_j$$

証明  $f(x) \in V_0$  ならば、 $f(x) = \sum_k c_k \phi_{0,k}(x)$  と表される。このとき、 $f(2^j x) = \sum_k c_k \phi_{0,k}(2^j x) = \sum_k c_k \phi_{j,k}(x)$  であるので、 $f(2^j x) \in V_j$  である。

同様に、 $f(x) \in V_j$  のとき、 $f(x) = \sum_k c'_k \phi_{j,k}(x)$  と表される。このとき、 $f(2^{-j} x) = \sum_k c'_k \phi_{j,k}(2^{-j} x) = \sum_k c'_k \phi_{0,k}(x)$  であるので、 $f(2^{-j} x) \in V_0$  がいえた。 ■

定理 4.17 近似空間の列  $V_0, V_1, \dots, V_j, \dots$  について

$$V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots$$

証明 注意 4.6 から、 $\forall f \in V_j$  は  $V_{j+1}$  の要素でもあるので、 $V_j \subset V_{j+1}$ 。ただし、包含関係  $\subset$  は strict で  $V_j \subsetneq V_{j+1}$  である。実際、 $V_{j+1}$  の要素であって  $V_j$  には属なさい関数  $f$  が存在する。たとえば、dyadic 区間  $I_{j+1,0}$  上の関数  $f(x) = \phi(2^{j+1}x)$  は  $V_{j+1}$  の要素であるが、 $V_j$  に属する dyadic 区間  $I_{j,k}$  上の関数  $\phi(2^j x - k)$  のいかなる線形結合も  $\phi(2^{j+1}x)$  とはできないため、 $f \notin V_j$  である。これより、 $V_{j+1}$  から  $V_j$  を取り去った  $V_{j+1} \setminus V_j$  は空でないことがわかる。 ■

### 4.1.3 Haar wavelet 関数

定理 4.17 より、スケール  $j$  の Haar スケーリング関数が張る空間  $V_j$  は  $V_{j-1}$  を内部に完全に含み、 $f \in V_j$  であるが  $f \notin V_{j-1}$  であるような関数が存在する。したがって、空間  $V_j$  は

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$$



と直和分解されるはずである。 $W_{j-1}$  をスケール  $j-1$  の詳細空間 (detail space) という。空間  $W_{j-1}$  が  $V_j$  内で  $V_{j-1}$  の直交補空間  $V_{j-1}^\perp$  となるようにとれるかを検討してみよう。簡単のためにスケール  $j=1$  で考えてみる。

探している関数  $\psi$  は、次のような条件を満たすものである。

- (1)  $\psi \in V_1$ 、つまり  $\psi(x) = \sum_{\ell} c_{\ell} \phi(2x - \ell)$ ,  $c_{\ell} \in \mathbb{R}$ ,
- (2)  $\psi \perp V_0$ 、つまり  $\forall k$  について  $\int \psi(t)^* \phi(t - k) dt = 0$ .

すなわち、(1) から dyadic 階段関数として階段幅が  $1/2$  であり、(2) から  $\phi$  との内積が  $0$  となるような  $\psi$  が求める関数である。いま、

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1)$$

と選んでみると

$$\langle \psi | \phi \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)^* \phi(t) dt = \int_0^{1/2} dt - \int_{1/2}^1 dt = 1/2 - 1/2 = 0$$

しかも、 $\psi(x)$  のサポート  $I_0$  は  $\phi(x - k)$ ,  $k \neq 0$  のサポート  $I_{0,k}$  とは重ならないために、 $k \neq 0$  について常に  $\int \psi(x - k)^* \phi(x) dx = 0$  である。したがって  $V_1 \ni \psi$  は空間  $V_0$  に直交、つまり  $\psi \in V_0^\perp$  であることがわかった。あらためて関数  $\psi$  (既に例 1.40 で登場している) を定義しておこう。

**定義 4.18 (Haar wavelet 関数)**

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1) \tag{4.4}$$

**演習 4.19**  $\psi(x-1), \psi(x-2), \psi(x-3)$  のグラフを描いてみなさい。また、 $\psi(2x-1), \psi(2x-2), \psi(2x-3)$  についてはどうか。

**演習 4.20**  $\phi(2x)$  を  $\phi(x-k)$  と  $\psi(x-\ell)$  の線形結合で表してみなさい。

(ヒント) 補題 4.28 参照。

$$\begin{aligned} & \sum_k \langle \phi(x-k) | \phi(2x) \rangle_{L^2} \phi(x-k) + \langle \psi(x-k) | \phi(2x) \rangle_{L^2} \psi(x-k) \\ &= \langle \phi(x) | \phi(2x) \rangle_{L^2} \phi(x) + \langle \psi(x) | \phi(2x) \rangle_{L^2} \psi(x) = \frac{1}{2} \phi(x) + \frac{1}{2} \psi(x) \end{aligned}$$

**演習 4.21**  $f(x) = 2\phi(4x) + 2\phi(4x-1) + \phi(4x-2) - \phi(4x-3)$  をグラフで表し、 $f(x) = \psi(2x-1) + 2\phi(2x)$ 、さらに  $f(x) = \psi(2x-1) + \psi(x) + \phi(x)$  と表されることを示しなさい。この事実は何を示しているかを説明しなさい。

**定義 4.22** スケール  $j$  の Haar wavelet 関数  $\phi_{j,k}$  を

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \tag{4.5}$$

で定義する。

演習 4.23  $\psi_{j,k}(x)$  はスケール  $j + 1$  の dyadic 階段関数

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} (\chi_{I_{j+1,2k}}(x) - \chi_{I_{j+1,2k+1}}(x))$$

であり、

$$\langle \psi_{j,k} | \psi_{j,k'} \rangle_{L^2} = \delta_{kk'}$$

であることを確かめなさい。

## 4.2 Haar 関数系

dyadic 区間  $I_{j,k}$  上で定義される Haar スケーリング関数  $\phi_{j,k}$  および Haar wavelet 関数  $\psi_{j,k}$  を Haar 関数系 (Haar system) という。Haar 系が構成する空間を詳しく調べてみよう。

命題 4.24  $V_1$  内の関数  $f_1(x) = \sum_k c_k \phi(2x - k)$  が

$$f_1 \perp V_0, \quad \text{つまり、全ての } \ell \text{ について } f_1 \perp \phi(x - \ell)$$

であるのは、

$$c_1 = -c_0, c_3 = -c_2, \dots, c_{2\ell+1} = -c_\ell,$$

であるときに限る。

証明  $V_1 \ni f_1(x) = \sum_k c_k \phi(2x - k)$  において、 $\phi(2x - k)$  のサポートは dyadic 区間  $I_{1,k}$ 、また  $\phi(x - \ell)$  のサポートは  $I_{0,\ell}$  であることを考慮すると

$$\begin{aligned} \langle f_1(x) | \phi(x - \ell) \rangle_{L^2} &= \sum_k c_k^* \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(2\left(t - \frac{k}{2}\right)\right)^* \phi(t - \ell) dt \\ &= \sum_\ell c_{2\ell} \int_\ell^{\ell+\frac{1}{2}} \phi(2(t - \ell))^* \phi(t - \ell) dt \\ &\quad + c_{2\ell+1} \int_{\ell+\frac{1}{2}}^{\ell+1} \phi\left(2\left(t - \ell - \frac{1}{2}\right)\right)^* \phi(t - \ell) dt \\ &= 0 \quad \text{であるためには } c_{2\ell} = -c_{2\ell+1} \text{ に限る} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_\ell c_{2\ell} \phi(2x - \ell) + c_{2\ell+1} \phi(2x - \ell - 1) = \sum_\ell c_{2\ell} [\phi(2x - \ell) - \phi(2x - \ell - 1)] \\ &= \sum_\ell c_{2\ell} \psi(x - \ell) \in V_0^\perp = W_0 \end{aligned}$$

■

これより、 $V_1 \ni f_1(x)$  が  $V_0$  に直交するとき、 $f_1$  は

$$f_1(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_{2\ell} \psi(x - \ell) \in W_0 = V_0^\perp$$

と表される。 $V_1$  内の関数が  $V_0$  に直交するのは、 $c_{2k}$  を添字を付け替え改めて  $c_k$  として、その関数が  $\sum_k c_k \psi(x - k)$  と表されるときに限るのである。これより、

$$W_0 = \text{cl} \left\{ \sum_{k \in \Lambda} c_k \psi_{0,k}(x) \mid a_k \in \mathbb{R}, \Lambda \text{ は有限の整数集合} \right\} = \overline{\text{span}} \{ \psi_{0,k}(x) \}_{k \in \Lambda}$$

は、 $V_1$  における  $V_0$  の直交補空間  $V_0^\perp = W_0$ 、つまり  $V_1 = V_0 \oplus W_0$  が示された。 $W_0$  をスケール 0 の詳細空間という。この結果は次のように一般化される。

**定理 4.25** スケール  $j$  の近似空間  $V_j$  および詳細空間  $W_j$  を、それぞれコンパクトサポートをもつ Haar wavelet 関数系  $\{\phi_{j,k}(x)\}_k$  および  $\{\psi_{j,k}(x)\}_k$  が張る空間とする。

$$V_j = \text{cl} \left\{ \sum_{k \in \Lambda} c_k \phi_{j,k}(x) \mid a_k \in \mathbb{R}, \Lambda \text{ は有限の整数集合} \right\} = \overline{\text{span}} \{ \phi_{j,k}(x) \}_{k \in \Lambda},$$

$$W_j = \text{cl} \left\{ \sum_{k \in \Lambda} d_k \psi_{j,k}(x) \mid b_k \in \mathbb{R}, \Lambda \text{ は有限の整数集合} \right\} = \overline{\text{span}} \{ \psi_{j,k}(x) \}_{k \in \Lambda}$$

このとき、 $W_j$  は  $V_{j+1}$  における  $V_j$  の直交補空間で、次式が成立する。

$$\begin{aligned} V_j &\perp W_j, \\ V_{j+1} &= V_j \oplus W_j. \end{aligned}$$

**証明** 1)  $W_j$  の各関数は  $V_j$  の全ての関数に直交し、逆に、2)  $V_j$  に直交する  $V_{j+1}$  の関数は  $W_j$  に属することを示そう。

1)  $W_j$  の関数を  $g(x) = \sum_k d_k \psi_{j,k}(x)$ 、また、 $f \in V_j$  とする。このとき、

$$\langle g \mid f \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^* f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_k 2^{j/2} d_k \psi(2^j t - k) \right)^* f(t) dt = 0$$

を示せばよい。

さて、 $f(x) \in V_j$  より、定理 4.16 から、 $f(2^{-j}x) \in V_0$  である。したがって、

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_k d_k \psi(t - k) \right)^* f(2^{-j}t) dt \quad (\psi(x) \text{ は } V_0 \text{ に直交するから}) \\ &= 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k d_k^* \psi(2^j y - k)^* f(y) dy \quad (\text{変数の置き換え } y = 2^{-j}t \text{ より}) \\ &= 2^{j/2} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)^* f(y) dy. \end{aligned}$$

これより、 $g$  は  $f \in V_j$  に直交することがわかり、1) が示された。

2)  $j = 0$  のときは既に命題 4.24 の後で示した。一般の  $j$  についても同様である。 ■

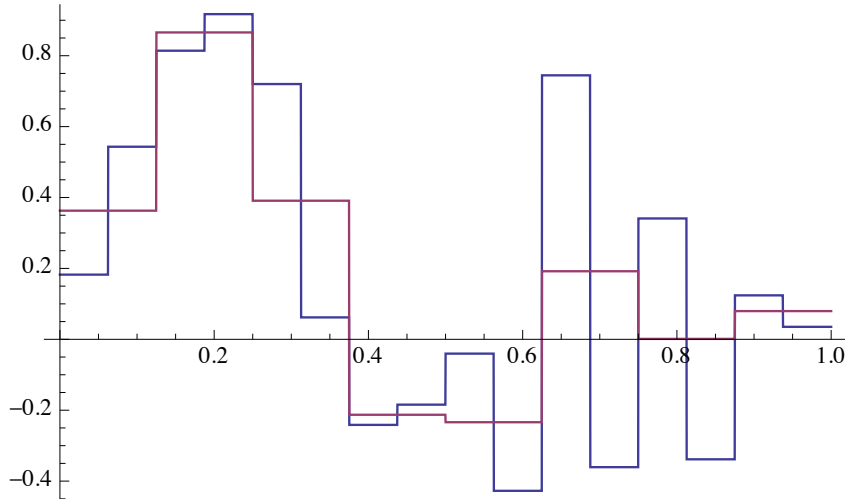


図 4.1 スケール  $J$  の dyadic 階段関数  $f_J$  (青線) とスケール  $J-1$  の dyadic 階段関数  $f_{J-1}$  (赤線) の dyadic 区間  $I_{J-1,k} = I_{J,2k} \cup I_{J,2k+1}$  で、 $f_{J-1}(x)$  は、 $f_J(x)$  の  $I_{J-1,k}$  での左右区間上の値  $c_J(2k)$  と  $c_J(2k+1)$  の平均値  $\frac{1}{2}(c_J(2k) + c_J(2k+1))$  を取る。

定理 4.25 を繰り返し適用すると、次のような  $V_j$  の直交分解を得る。

#### 系 4.26

$$\begin{aligned}
 V_j &= W_{j-1} \oplus V_{j-1} \\
 &= W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus V_{j-2} \\
 &\dots \\
 &= W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots \oplus W_J \oplus V_J \\
 &\dots \\
 &= W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots \oplus W_0 \oplus V_0.
 \end{aligned}$$

演習 4.27 この空間構造を多重化解像度解析 (MRA: Multi Resolution Analysis) という。この空間構造をよく理解しなさい。Fourier 基底で張られる関数空間の分解と比較して検討してみなさい。ここでは、Haar 関数系をつかって MRA を構成したわけだが、MRA を他の関数系を使って構成できるかどうかは、Wavelet 解析における中核的課題である。

定理 4.25 より次の補題が得られる。

補題 4.28 (分割補題)  $f_J(x)$  をスケール  $J$  の dyadic 階段関数とする。このとき、 $f_J(x)$  は次のように分割される。

$$f_J(x) = w_{J-1}(x) + f_{J-1}(x),$$

ここで、 $f_{J-1}(x)$  はスケール  $J-1$  での平均化関数 (approximated function) という。また、 $w_{J-1}(x)$  をスケール  $J-1$  の平均化に相補的な詳細関数 (detail function) といい、スケール  $J-1$  の Haar wavelet

の関数

$$w_{J-1} = \sum_k d_k^{J-1} \psi_{J-1,k}(x), \quad (4.6)$$

で表される。

証明  $f_J(x)$  がスケール  $J$  の dyadic 階段関数であることより、 $f_J(x)$  は区間  $I_{J,k}$  で一定値  $c_J(k)$  を持つ、つまり、

$$f_J(x) = \sum_k c_k^J \chi_{I_{J,k}}(x), \quad c_k^J = 2^j \int_{I_{J,k}} f(t) dt$$

と表されると仮定する。各区間  $I_{J-1,k} = I_{J,2k} \cup I_{J,2k+1}$  について、スケール  $J-1$  の平均化関数値  $f_{J-1}(x)$  を次で定義する。

$$\begin{aligned} f_{J-1}(x) &= \left[ 2^{J-1} \int_{I_{J-1,k}} f_J(t) dt \right] \chi_{I_{J-1,k}}(x) = \left[ 2^{J-1} \left( \int_{I_{J,2k}} + \int_{I_{J,2k+1}} \right) f_J(t) dt \right] \chi_{I_{J-1,k}}(x) \\ &= \frac{1}{2} (c_{2k}^J + c_{2k+1}^J) \chi_{I_{J-1,k}}(x). \end{aligned} \quad (4.7)$$

図 4.1 に示したように、区間  $I_{J-1,k}$  上で、 $f_{J-1,k}(x)$  は  $I_{J-1,k}$  の左右区間上の  $f_J(x)$  の値の平均値を取る。

$w_{J-1}(x) = f_J(x) - f_{J-1}(x)$  とする。注意 4.6 から、 $w_{J-1}$  もスケール  $J$  の dyadic 階段関数である。このとき、

$$\begin{aligned} \int_{I_{J-1,k}} w_{J-1}(t) dt &= \int_{I_{J-1,k}} f_J(t) dt - \int_{I_{J-1,k}} f_{J-1}(t) dt \\ &= \left( \int_{I_{J,2k}} f_J(t) dt + \int_{I_{J,2k+1}} f_J(t) dt \right) - \int_{I_{J-1,k}} f_{J-1}(t) dt \\ &= (2^{-J} c_{2k}^J + 2^{-J} c_{2k+1}^J) - 2^{-(J-1)} \frac{1}{2} (c_{2k}^J + c_{2k+1}^J) \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって、区間  $I_{J-1,k}$  上での詳細関数  $w_{J-1}(x)$  は Haar wavelet 関数  $\psi_{J-1,k}(x)$  の倍数であらねばならず、(4.6) の形となる。 ■

補題の証明から、 $f_J(x) = w_{J-1}(x) + f_{J-1}(x)$  は、解像度  $2^{-J}$  の階段関数  $f_J(x)$  が 2 倍幅の区間  $I_{J-1,k}$  で平均化して得られる階段関数  $f_{J-1}(x)$  と各区間  $I_{J-1,k}$  での平均値からのズレ ( $I_{J-1,k} = I_{J,2k} \cup I_{J,2k+1}$  の左右区間でプラスとマイナスがある) を表す詳細関数  $w_{J-1}(x)$  との和として表されることを示している。これがスケール  $J-1$  の平均化に相補的な詳細関数  $w_j$  の意味である。

分割補題 4.28 を繰り返して適用すると、近似空間  $V_j$  内の関数  $f_j$  は、スケール  $J (J < j)$  までの平均化操作によって近似化した空間  $V_J$ 、および近似スケール  $J$  に至るまでの詳細空間の列  $W_{j-1}, \dots, W_{J+1}, W_J$

に  $f_j$  を正射影して得られる関数の和

$$\begin{aligned} f_j &= w_{j-1} + w_{j-2} + \cdots + w_J + f_J \\ &\cdots \\ &= w_{j-1} + w_{j-2} + \cdots + w_0 + f_0 \end{aligned}$$

と表すことができる。ここで、 $w_n$  は  $f_j$  の Haar wavelet 基底  $\{\psi_{n,k}\}$  で張られる詳細空間  $W_n$  への正射影、 $f_J$  は  $f_j$  の Haar スケーリング基底  $\{\phi_{J,k}\}$  で張られる近似空間  $V_J$  への正射影で得られる関数である。こうした分解を Haar 分解 (Haar decomposition) あるいは Haar ウェーブレット変換 (Haar Wavelet transformation) と言う。これについては節 4.3 の近似関数と詳細関数再訪、および、節 4.4 の Wavelet 変換: 分解と再構成アルゴリズムで改めて取り上げる。

例 4.29 例 4.20 では、 $\chi_{[0,1/2)}$  を  $\phi_{j,k}$  と  $\psi_{j,k}$  を使って展開した。 $f(x) = \chi_{[0,3/4)}(x)$  の場合を考えよう。区間  $[0, 3/4)$  は dyadic 区間であり、実際、 $[0, \frac{3}{4}) = I_{1,0} \cup I_{1,1}$  である。 $I_{0,0} = [0, 1)$  以外では  $f(x) = 0$  であるため、展開係数の候補となるのは区間  $[0, 1)$  内の Dyadic 区間上の  $\phi_{j,k}$  と  $\psi_{j,k}$  との内積に限られる。

$\langle f | \phi_{0,0} \rangle_{L^2} = 3/4$ 、 $k \neq 0$  について  $\langle f | \phi_{0,k} \rangle_{L^2} = 0$ 。また、 $I_{j,k} \subset [0, 3/4)$  および  $I_{j,k} \subset [3/4, 1)$  であるような  $j, k$ 、すなわち  $2 \leq j$  と  $0 \leq k \leq 2^j - 1$  について  $\langle f | \psi_{j,k} \rangle_{L^2} = 0$ 。したがって、 $\langle f | \psi_{0,0} \rangle_{L^2} = 1/4$  と  $\langle f | \psi_{1,1} \rangle_{L^2} = 2^{-3/2}$  だけが非零である。結局、

$$\chi_{[0,3/4)}(x) = 2^{-3/2} \psi_{1,1}(x) + \frac{1}{4} \psi_{0,0}(x) + \frac{3}{4} \phi_{0,0}(x).$$

演習 4.30  $f(x) = \chi_{[0,11/16)}(x)$  を Haar 分解しなさい。

例 4.31  $f(x) = \chi_{[0,2/3)}(x)$  の Haar 分解を考えよう。 $\langle f | \phi_{0,0} \rangle_{L^2} = 2/3$ 、 $j, k \neq 0$  について  $\langle f | \phi_{0,k} \rangle_{L^2} = 0$ 。区間  $[0, 2/3)$  は dyadic 区間ではないことに注意しよう。その結果、全てのスケール  $j \geq 0$  で  $\psi_{j,k}(x)$  の係数があり得る。ただし、 $\langle f | \psi_{j,k} \rangle_{L^2}$  が非零となるのは、各スケール  $j \geq 0$  で  $2/3$  を含む唯一つの  $k_j$  の dyadic 区間  $I_{j,k_j}$  だけである。したがって

$$\begin{aligned} \chi_{[0,2/3)}(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} c_j(k_j) \psi_{j,k_j}(x) + \frac{2}{3} \phi_{0,0}(x) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} c_{k_j}^j \psi(2^j x - k_j) + \frac{2}{3} \phi(x), \quad c_{k_j}^j = 2^{j/2} c_j(k_j) \end{aligned}$$

と表される。

演習 4.32  $f(x) = \chi_{[0,2/3)}(x)$  の Haar 分解において、 $c_j(k_j)$  および  $c_j'(k_j)$  の値を  $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  について求めなさい。

近似空間  $\{V_j\}$  および詳細空間  $\{W_j\}$  の直交性は次の定理として表される。

定理 4.33 (Haar 系の正規直交性)

(1)  $W_J$  を張るスケール  $J$  の Haar wavelet 系  $\{\psi_{J,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  は  $W_J$  の正規直交系である。

- (2)  $V_J$  および  $W_J$  を張るスケール  $J$  の組  $\{\phi_{J,k}, \psi_{J,k'}\}_{k,k' \in \mathbb{Z}}$  は  $\mathbb{R}$  上の正規直交系で、 $V_J \perp W_J$ .
- (3)  $\{W_j\}$  を張る各スケール  $j$  の Haar wavelet 系  $\{\psi_{j,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  は  $\mathbb{R}$  上の正規直交系で、 $j \neq j'$  について互いに  $W_j \perp W_{j'}$ .
- (4) スケール  $J$  の Haar 系  $\{\phi_{J,k}, \psi_{j,k'}(x)\}_{j \geq J, k,k' \in \mathbb{Z}}$  は  $\mathbb{R}$  上の正規直交系である。 $V_J$  を張る Haar スケーリング基底のスケールは  $J$ 、一方、wavelet 基底のスケール  $j$  は  $J$  以上 ( $J \leq j$ ) であることに注意。

証明 1) まず、与えられたスケール  $J$  での直交性を示す。 $k, k' \in \mathbb{Z}$  に対する dyadic 区間  $I_{J,k}, I_{J,k'}$  について

$$I_{J,k} \cap I_{J,k'} = \begin{cases} 0, & k \neq k' \\ I_{J,k} & k = k' \end{cases}$$

であることより

$$\langle \psi_{J,k} | \psi_{J,k'} \rangle_{L^2} = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \psi_{J,k}(t)^* \psi_{J,k'}(t) dt = 0 & k \neq k' \\ \int_{\mathbb{R}} |\psi_{J,k}(t)|^2 dt = 1 & k = k'. \end{cases}$$

2) 定理 4.25 である。

3) スケール間の直交性を示す。 $k, k' \in \mathbb{Z}, j > j'$  のとき、補題 4.3 から、次の3通りを考えればよい。

(1)  $I_{j,k} \cap I_{j',k'} = \emptyset$  のとき

$$\langle \psi_{j,k} | \psi_{j',k'} \rangle_{L^2} = 0.$$

(2)  $I_{j,k} \subset I_{j',k'}^{\ell}$  のとき、 $I_{j',k'}^{\ell}$  上で  $\psi_{j',k'} = 1$ . よって、

$$\langle \psi_{j,k} | \psi_{j',k'} \rangle_{L^2} = \int_{I_{j,k}} \psi_{j,k}(t)^* \psi_{j',k'}(t) dt = \int_{I_{j,k}} \psi_{j,k}(t) dt = 0.$$

(3)  $I_{j,k} \subset I_{j',k'}^r$  のとき、 $I_{j',k'}^r$  上で  $\psi_{j',k'} = -1$ . よって、

$$\langle \psi_{j,k} | \psi_{j',k'} \rangle_{L^2} = \int_{I_{j,k}} \psi_{j,k}(t)^* \psi_{j',k'}(t) dt = - \int_{I_{j,k}} \psi_{j,k}(t) dt = 0.$$

(4)  $j \geq J$  について、 $\phi_{J,k}(x)$  と  $\psi_{j,k}(x)$  の dyadic 区間をしらべることによって、命題 4.24 や 3) と同様にして、 $k, k' \in \mathbb{Z}, j \geq J$  に対して

$$\langle \phi_{J,k} | \psi_{j,k'} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi_{J,k}(t)^* \psi_{j,k'}(t) dt = 0.$$

■

### 4.3 Haar 近似関数と詳細関数再訪

節 1.3 では直交系と直交射影の方法を紹介した。節 4.2 で、近似空間  $V_j$  を階層的に直和分解することによって (定理 4.25) 関数を近似する方法を紹介した。この方法は、Fourier 基底を使う関数の近似法とはまったく別種の正規直交系の構成に基づいている。

#### 4.3.1 Haar 近似関数

定義 4.34 与えられたスケール  $j \in \mathbb{Z}$  に関する近似空間  $V_j = \overline{\text{span}} \{ \phi_{j,k}(x) \}_{k \in \mathbb{Z}}$  への関数  $f$  の射影演算子  $P_j$  を次で定義する。

$$P_j f(x) = \sum_k \langle \phi_{j,k} | f \rangle_{L^2} \phi_{j,k}(x) \quad (4.8)$$

$P_j f(x)$  を  $f$  のスケール  $j$  による Haar 平均化関数という。

注意 4.35  $\{ \phi_{j,k}(x) \}$  が  $\mathbb{R}$  上の正規直交系より、dyadic 階段関数  $P_j f(x)$  は  $L^2$  の意味で  $f(x)$  を最良近似する  $V_j$  内の関数である。  $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \chi_{I_{j,k}}(x)$  に注意すると

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,k} | f \rangle_{L^2} \phi_{j,k}(x) &= 2^j \langle \phi(2^j x - k) | f \rangle_{L^2} \phi(2^j x - k) \\ &= 2^j \left( \int_{I_{j,k}} f(t) dt \right) \chi_{I_{j,k}}(x) \end{aligned}$$

であるので、 $P_j f(x)$  は dyadic 区間  $I_{j,k}$  上で平均された値を取るから、 $V_j$  を平均化空間というのである。スケール  $j$  の  $P_j f(x)$  の解像度は dyadic 区間  $I_{j,k}$  の幅  $2^{-j}$  であり、その区間上における  $f(x)$  の値は近似値  $\langle \phi_{j,k} | f \rangle_{L^2}$  で置き換えられてしまい、 $f$  の詳細は失われてしまう。

まず、射影演算子  $P_j$  の性質を調べておこう。

#### 補題 4.36

- (1)  $P_j$  は線形演算子である。つまり、 $f(x), g(x)$  および  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  について

$$P_j(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha P_j f(x) + \beta P_j g(x).$$

- (2)  $P_j$  のベキ等性 ( idempotent )  $P_j^2 = P_j$ 、つまり

$$P_j(P_j f)(x) = P_j f(x).$$

- (3) スケール  $j' \geq j$  の  $P_{j'}$  と  $f \in V_j$  について

$$P_{j'} f(x) = P_j f(x).$$

- (4)

$$\|P_j f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}.$$



証明 (1), (2) は  $P_j$  の定義から明らか。(3) は、(2) と  $g \in V_j$  のとき  $P_j g = g$  であること、および注意 4.6 からわかる。

(4)  $\{\phi_{j,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  が正規直交系であることから

$$\begin{aligned} \|P_j f\|_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_k \langle f | \phi_{j,k} \rangle_{L^2} \phi_{j,k}(t) \right|^2 dt \\ &= \sum_k |\langle f | \phi_{j,k} \rangle_{L^2}|^2 = \sum_k \left| 2^{j/2} \int_{I_{j,k}} f(t) dt \right|^2. \end{aligned}$$

さらに Cauchy-Schwarz の不等式から

$$\left| 2^{j/2} \int_{I_{j,k}} f(t) dt \right|^2 \leq \left( \int_{I_{j,k}} 2^j dt \right) \left( \int_{I_{j,k}} |f(t)|^2 dt \right) = \int_{I_{j,k}} |f(t)|^2 dt.$$

したがって、

$$\|P_j f\|_{L^2} \leq \sum \int_{I_{j,k}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \|f\|_{L^2}^2.$$

■

補題 4.37  $\mathbb{R}$  上の連続関数  $f$  に対して

(1)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_j f - f\|_{L^2} = 0,$$

(2)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_{-j} f\|_{L^2} = 0.$$

証明 (1)  $f(x)$  が長さ  $2^N$  の区間  $I$  で定義されているとする (コンパクトサポート)。このとき、ある整数  $J$  と関数  $g \in V_J$  があって

$$\|f - g\|_{\infty} = \max_x |f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2^{N+2}}}$$

とすることができる。 $j > J$  について、補題 4.36(3) より、 $P_j g(x) = g(x)$  である。Minkowski の不等式と補題 4.36(4) から

$$\begin{aligned} \|P_j f - f\|_{L^2} &\leq \|P_j f - P_j g\|_{L^2} + \|P_j g - g\|_{L^2} + \|g - f\|_{L^2} \\ &= \|P_j(f - g)\|_{L^2} + \|g - f\|_{L^2} \leq 2\|g - f\|_{L^2} \end{aligned}$$

一方、

$$\|g - f\|_{L^2}^2 = \int_I |g(t) - f(t)|^2 dt < \int_I \frac{\varepsilon^2}{2^{N+2}} dt = \frac{\varepsilon^2}{4}$$

から  $\|g - f\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}$  を得る。したがって

$$\|P_j f - f\|_{L^2} < 2\|g - f\|_{L^2} < \varepsilon.$$

(2)  $f(x)$  は区間  $I$  上のコンパクトサポートであるので、 $I \subset I_{-j,k}$  であるようなある Dyadic 区間  $I_{-j,k}$  が存在して、

$$P_j f(x) = 2^{-j} \left( \int_{I_{-j,k}} f(t) dt \right) \chi_{I_{j,k}}(x)$$

となる。したがって

$$\|P_j f\|_{L^2}^2 \rightarrow 0, \quad (j \rightarrow \infty).$$

■

#### 4.3.2 Haar 詳細関数

定義 4.38  $\mathbb{R}$  上の関数  $f$  に関するスケール  $j$  の Haar 詳細演算子  $Q_j$  を

$$Q_j f(x) = P_{j+1} f(x) - P_j f(x). \quad (4.9)$$

詳細演算子  $Q_j$  は  $f$  をどのような関数へ射影するかについて、次の補題が成立する。

補題 4.39  $\mathbb{R}$  上のコンパクトサポートな連続関数  $f$  に対して、 $Q_j f(x)$  は次の関数として表される。

$$Q_j f(x) = \sum_k \langle f | \psi_{j,k} \rangle_{L^2} \psi_{j,k}(x). \quad (4.10)$$

証明 与えられたスケール  $j$  の dyadic 区間上の  $x \in I_{j,k}$  で

$$P_j f(x) = 2^j \int_{I_{j,k}} f(t) dt.$$

また、 $I_{j,k}$  はスケール  $j+1$  の区間  $I_{j,k}^\ell = I_{j+1,2k}$  および  $I_{j,k}^r = I_{j+1,2k+1}$  によって  $I_{j,k} = I_{j,k}^\ell \cup I_{j,k}^r$  であることから、

$$P_{j+1} f(x) = \begin{cases} 2^{j+1} \int_{I_{j,k}^\ell} f(t) dt, & x \in I_{j,k}^\ell, \\ 2^{j+1} \int_{I_{j,k}^r} f(t) dt, & x \in I_{j,k}^r \end{cases}$$

であることに注意する。

$$\psi_{j,k}(x) = \begin{cases} 2^{j/2}, & x \in I_{j,k}^\ell, \\ -2^{j/2}, & x \in I_{j,k}^r, \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

を使うと、 $x \in I_{j,k}^\ell$  について

$$\begin{aligned} Q_j f(x) &= P_{j+1} f(x) - P_j f(x) \\ &= 2^j \left( 2 \int_{I_{j,k}^\ell} f(t) dt - \int_{I_{j,k}^\ell} f(t) dt - \int_{I_{j,k}^r} f(t) dt \right) \\ &= 2^j \left( \int_{I_{j,k}^\ell} f(t) dt - \int_{I_{j,k}^r} f(t) dt \right) \\ &= 2^{j/2} \langle f | \psi_{j,k} \rangle. \end{aligned}$$

一方、 $x \in I_{j,k}^r$  については

$$\begin{aligned} Q_j f(x) &= 2^j \left( - \int_{I_{j,k}^\ell} f(t) dt + \int_{I_{j,k}^r} f(t) dt \right) \\ &= -2^{j/2} \langle f | \psi_{j,k} \rangle \end{aligned}$$

である。したがって、区間  $I_{j,k}$  上で

$$Q_j f(x) = \langle f | \psi_{j,k} \rangle_{L^2} \psi_{j,k}(x)$$

となる。 ■

スケール  $j$  の射影演算子  $Q_j$  の性質をまとめておこう。

補題 4.40 (1)  $Q_j$  は線形演算子である。つまり、 $f(x), g(x)$  および  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  について

$$Q_j(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha Q_j f(x) + \beta Q_j g(x).$$

(2)  $Q_j$  のベキ等性 ( idempotent )  $Q_j^2 = Q_j$ 、つまり

$$Q_j(Q_j f)(x) = Q_j f(x).$$

(3) スケール  $j' \neq j$  の  $Q_{j'}$  と  $f \in W_j$  について

$$Q_{j'} f(x) = 0.$$

(4)

$$\|Q_j f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}.$$

証明 補題 4.36 の証明、および  $W_j$  の基底関数  $\psi_{j,k}$  の性質を使う。 ■

定理 4.33 の Haar 系の正規直交性をつぎのように射影演算子  $P_j$  と  $Q_j$  を使って精密化することができる。

定理 4.41 (Haar 系の完全正規直交性) スケール  $J$  の Haar 系  $\{\phi_{J,k}(x), \psi_{j,k}(x) | j \geq J\}_{k \in \mathbb{Z}}$  は  $\mathbb{R}$  上の完全正規直交系である。

証明 定理 4.33 の (4) で正規直交性を示した。完全性を示すには、 $\mathbb{R}$  の上のコンパクト連続関数  $f$  が

$$f(x) \in \overline{\text{span}}\{\phi_{J,k}, \psi_{j,k}\}_{j \geq J, k \in \mathbb{Z}}$$

をいえばよい。 $\varepsilon > 0$  とすると、ある整数  $N$  があって  $\|P_N f - f\|_{L^2} < \varepsilon$  とできることから、 $N > J$  と取る。定義式 (4.9) より

$$\begin{aligned} \sum_{j=J}^{N-1} Q_j f(x) &= \sum_{j=J}^{N-1} P_{j+1} f(x) - P_j f(x) \\ &= P_N f(x) - P_J f(x) \end{aligned}$$

これより、補題の式 (4.10) から

$$P_N f(x) = \sum_{j=J}^{N-1} \sum_{k \in \Lambda} \langle f | \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x) + \sum_{k \in \Lambda} \langle f | \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}(x)$$

ここで、 $f$  がコンパクトサポートであるので  $\Lambda$  は有限集合である。したがって、

$$P_N f(x) \in \text{span}\{\phi_{J,k}, \psi_{j,k}\}_{j \geq J, k \in \mathbb{Z}}$$

および  $\|P_N f - f\|_{L^2} < \varepsilon$  が示され、完全性が証明された。 ■

さらに、次も成立する。

定理 4.42 Haar 系  $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  は  $\mathbb{R}$  上の完全正規直交系である。

証明 定理 4.33 の (3) で正規直交性を示した。完全性を示すには、 $\mathbb{R}$  上のコンパクトな連続関数  $f$  について

$$f(x) \in \overline{\text{span}}\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$$

をいう。任意のスケール  $J \in \mathbb{N}$  について、定義式 (4.9) より

$$\begin{aligned} \sum_{j=-J}^{J-1} Q_j f(x) &= \sum_{j=-J}^{J-1} P_{j+1} f(x) - P_j f(x) \\ &= P_J f(x) - P_{-J} f(x) \end{aligned}$$

補題 4.37 から

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \|P_J f - f\|_{L^2} + \|P_{-J} f\|_{L^2} = 0$$

Minkowski の不等式を使うと

$$\begin{aligned} \lim_{J \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{j=-J}^{J-1} Q_j f \right\|_{L^2} &= \lim_{J \rightarrow \infty} \|f - P_J f + P_{-J} f\|_{L^2} \\ &\leq \lim_{J \rightarrow \infty} \|P_J f - f\|_{L^2} + \|P_{-J} f\|_{L^2} = 0. \end{aligned}$$

また、 $f$  がコンパクトサポートであることから  $\Lambda$  を有限集合として

$$\sum_{j=-J}^{J-1} Q_j f(x) = \sum_{j=-J}^{J-1} \sum_{k \in \Lambda} \langle f | \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x)$$

である。したがって

$$\sum_{j=-J}^{J-1} Q_j f(x) \in \overline{\text{span}\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}}$$

より、完全性が証明できた。 ■

注意 4.43 定理 4.42 から、 $\mathbb{R}$  上の  $L^2$  関数  $f$  を形式的に

$$f(x) = \sum_j \sum_k \langle f | \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x)$$

と表してみる。このとき、両辺を積分すると

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \sum_j \sum_k \langle f | \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x) dx \\ &= \sum_j \sum_k \langle f | \psi_{j,k} \rangle \int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(x) dx = 0 \end{aligned}$$

となって、 $\mathbb{R}$  上の  $L^2$  関数  $f$  はすべて  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$  であることになる。この間違いは、可積分性や滑らかさやコンパクトサポートなど  $f$  について何も仮定されていないことからくる。

次を証明抜きで述べておこう。

定理 4.44 空間  $L^2(\mathbb{R})$  は次の無限直和として分解される。

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots$$

この分解に応じて、各  $f \in L^2(\mathbb{R})$  は

$$f = f_0 + \sum_{j=0}^{\infty} w_j$$

と一意に表される。

## 4.4 Wavelet 変換： 分解と再構成アルゴリズム

分割補題 4.28 の言葉をつかうと、スケール  $j$  の階段関数  $P_j f(x)$  は解像度  $2^{-j}$  ( $j > J$ ) あるいは解像度 1 まで階段関数を使って次のように分解することができる。この操作をウェーブレット分解 (wavelet decomposition) またはウェーブレット変換 (wavelet transformation) という。

$$\begin{aligned} P_j f(x) &= Q_{j-1} f(x) + Q_{j-2} f(x) + \dots + Q_J f(x) + P_J f(x) \\ &= Q_{J-1} f(x) + Q_{J-2} f(x) + \dots + Q_0 f(x) + P_0 f(x) \end{aligned} \tag{4.11}$$

ここで、関数  $P_j f$  は

$$\begin{aligned}
 P_j f(x) &= \sum_k \langle f | \phi_{j,k} \rangle_{L^2} \phi_{j,k}(x) \\
 &= \sum_k 2^j \langle f | \phi(2^j x - k) \rangle \phi(2^j x - k) = \sum_k \left( 2^j \int_{I_{j,k}} f(t) dt \right) \phi(2^j x - k) \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

は解像度  $2^{-j}$  ( $j > J$ ) の階段関数であり、解像度を細かくすれば（より大きなスケール  $j$  とすれば） $f(x)$  の特長をよりよく近似すると考えることができる（補題 4.37 参照）。ただし、 $P_j f(x)$  を得るにはまず係数  $\langle f | \phi_{j,k} \rangle_{L^2} = 2^j \int_{I_{j,k}} f(x) dx$  を計算しなければならない。しかし、以下でみるように、式 (4.11) の右辺にある関数（Haar 関数の係数）を求めるにはこうした積分計算をする必要はない。

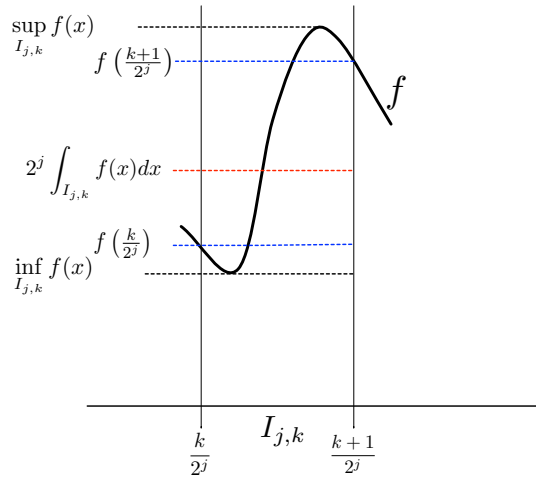


図 4.2 スケール  $j$  の dyadic 区間  $I_{j,k}$  上の関数  $f$  の平均化値  $2^j \int_{I_{j,k}} f(x) dx$  と両端点での標本値  $f(\frac{k}{2^j})$  および  $f(\frac{k+1}{2^j})$ .  $f$  が  $I_{j,k}$  上で単調なとき、 $f(\frac{k}{2^j}) < 2^j \int_{I_{j,k}} f(x) dx < f(\frac{k+1}{2^j})$  となる。

多くの応用では、コンパクトサポート、たとえば区間  $[a, b)$  上の関数  $f$  を考える。このとき、区間  $[a, b)$  から  $[0, 1)$  への同相写像を  $\tau : x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$  としたとき次の可換関係

$$\begin{array}{ccc}
 [a, b) & \xrightarrow{f} & [a, b) \\
 \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\
 [0, 1) & \xrightarrow{\hat{f}} & [0, 1)
 \end{array} \quad (4.13)$$

より、 $[a, b)$  上の関数  $f$  を  $[0, 1)$  上の関数  $\hat{f} = \tau \circ f \circ \tau^{-1}$  と自然に同一視することができる。コンパクトサポート  $[a, b)$  上の関数をこの同一視によって  $[0, 1)$  上の関数として取り扱おうと計算上都合がよい。

一方、関数  $f$  を  $x = \dots, -2/2^j, -1/2^j, 0, 1/2^j, 2/2^j, \dots$  といった幅  $2^{-j}$  の dyadic 区間  $\{I_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  の端点で関数値を標本化  $\{f(\frac{k}{2^j})\}_k$  することがある。幅  $|\Delta x| = \frac{1}{2^j}$  を持つ間隔  $\Delta x$  で関数値を標本化することによって関数  $f$  が十分正しく近似できるという根拠が Shannon-Whittaker の標本化定理??である。帯域が制限された信号  $f$  の最大周波数の 2 倍の周期幅（Nyquist 周期）で標本化した離散信号列  $\mathbf{f} = (f^0 f^1 \dots f^{N-1})$  から信号  $f$  が再現されるからである。

したがって、コンパクトサポートを持つ関数においては、区間  $[0, 1)$  上の関数  $f$  と同一視した上で、式 (4.12) の  $P_j f(x)$  を計算するのではなく解像度  $2^{-j}$  で標本化して得られた  $2^j$  個の関数値の組  $\{c_k^j\}_{k=0, \dots, 2^j-1}$  で定義される次の階段関数  $f_j$  を考え、これを解像度  $2^{-j}$  による関数  $f$  の近似  $P_j f$  とすることができる。

$$P_j f(x) \sim f_j(x) = \sum_{k=0}^{2^j-1} c_k^j \phi(2^j x - k) = \sum_{k=0}^{2^j-1} f\left(\frac{k}{2^j}\right) \phi(2^j x - k).$$

#### 4.4.1 ウェーブレット変換の分解アルゴリズム

Haar スケーリング関数  $\phi$  と wavelet 関数  $\psi$  との関係

$$\begin{aligned} \phi(2x) &= \frac{\psi(x) + \phi(x)}{2} \\ \phi(2x - 1) &= \frac{\phi(x) - \psi(x)}{2} \end{aligned}$$

をつかって、ただちに次の関係を得る。

補題 4.45

$$\phi(2^j x) = \frac{\psi(2^{j-1} x) + \phi(2^{j-1} x)}{2} \tag{4.14}$$

$$\phi(2^j x - 1) = \frac{\phi(2^{j-1} x) - \psi(2^{j-1} x)}{2} \tag{4.15}$$

一般に

$$\phi(2^j x - 2k) = \frac{\psi(2^{j-1} x - k) + \phi(2^{j-1} x - k)}{2} \tag{4.14'}$$

$$\phi(2^j x - 2k - 1) = \frac{\psi(2^{j-1} x - k) - \phi(2^{j-1} x - k)}{2} \tag{4.15'}$$

分割補題 4.28 は次のようにウェーブレット変換における Haar 分解係数の関係を与える。

演習 4.46 補題 4.45 を使って、例 4.21 で取り上げた  $f(x) = 2\phi(4x) + 2\phi(4x - 1) + \phi(4x - 2) - \phi(4x - 3)$  を Haar 分解して、 $f(x) = \psi(2x - 1) + \psi(x) + \phi(x)$  となることを示しなさい。

定理 4.47 (Haar 分解定理) スケール  $j$  の関数を

$$f_j(x) = \sum_k c_k^j \phi(2^j x - k) \in V_j$$

とする。このとき、関数  $f_j$  は

$$f_j(x) = w_{j-1}(x) + f_{j-1}(x),$$

と Haar 分解されて、

$$w_{j-1}(x) = \sum_k d_k^{j-1} \psi(2^{j-1}x - k) \in W_{j-1},$$

$$f_{j-1}(x) = \sum_k c_k^{j-1} \phi(2^{j-1}x - k) \in V_{j-1}$$

である。ここで、

$$c_k^{j-1} = \frac{c_{2k}^j + c_{2k+1}^j}{2}, \quad (4.16)$$

$$d_k^{j-1} = \frac{c_{2k}^j - c_{2k+1}^j}{2}. \quad (4.17)$$

証明

$$\begin{aligned} f_j &= \sum_k c_k^j \phi(2^j - k) \\ &= \sum_k c_{2k}^j \phi(2^j x - 2k) + \sum_k c_{2k+1}^j \phi(2^j x - 2k - 1) \end{aligned}$$

と添字についての和を偶数と奇数にわけて考え、補題 4.45 を使うと

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum_k c_{2k}^j \frac{\psi(2^{j-1}x - k) + \phi(2^{j-1}x - k)}{2} + \sum_k c_{2k+1}^j \frac{\phi(2^{j-1}x - k) - \psi(2^{j-1}x - k)}{2} \\ &= \sum_k \left( \frac{c_{2k}^j - c_{2k+1}^j}{2} \right) \psi(2^{j-1}x - k) + \left( \frac{c_{2k}^j + c_{2k+1}^j}{2} \right) \phi(2^{j-1}x - k) \\ &= w_{j-1}(x) + f_{j-1}(x). \end{aligned}$$

■

信号  $f$  を離散化してスケール  $J$  の解像度  $2^{-J}$  で標本化した係数  $\{c_k^J = f(\frac{k}{2^J})\}_k$  によって階段関数  $f_J(x)$  をひとたび定めると、分解定理 4.47 を繰り返し適用して得られる Haar 分解

$$f_J = w_{J-1} + w_{J-2} + \cdots + w_0 + f_0$$

の係数はスケール  $J$  における初期係数の組  $\{c_k^J\}$  だけから

$$\begin{array}{ccccccc} c_{k_J}^J & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & c_{k_j}^j & \rightarrow & c_{k_{j-1}}^{j-1} & \cdots & \rightarrow & c_0^0 \\ & & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & & & & d_{k_j}^j & \searrow & d_{k_{j-1}}^{j-1} & \cdots & \searrow & d_0^0 \end{array} \quad (4.18)$$

のような形で段階的に決定できるのである。 $\{c_k^j\} \rightarrow \{c_k^{j-1}\} \cup \{d_k^{j-1}\}$  を 1 段階 wavelet 変換 (1-step wavelet transformation) と呼ぼう。

係数の個数は  $\#\{c_k^j\} = \#\{c_k^{j-1}\} + \#\{d_k^{j-1}\}$  と 1 段階 wavelet 変換では変わらず、平均化係数は  $\{c_k^j\} \rightarrow \{c_k^{j-1}\}$  で個数は半分になることに注意する。したがって、段階  $j$  ( $J-1 \geq j \geq 0$ ) までに得られ



た全係数集合  $\{\{d_{k_{J-1}}^{J-1}\}, \dots, \{d_{k_j}^j\}, \{c_{k_j}^j\}\}$  の要素数は変わらず、最初の標本数  $2^J$  と同じである。実際、 $0 \leq k_j \leq 2^j - 1$  であることに注意すると、段階  $j$  までに得られた係数集合の要素数は

$$\left( \sum_{s=j}^{J-1} 2^s \right) + 2^j = 2^J$$

である。こうして段階  $j$  ( $J-1 \geq j \geq 0$ ) までに得られた Haar 関数系の係数の組  $\{\{d_{k_{J-1}}^{J-1}\}, \dots, \{d_{k_j}^j\}, \{c_{k_j}^j\}\}$  から階段関数

$$w_j = \sum_{k_j=0}^{2^j-1} d_{k_j}^j \psi(2^j x - k_j),$$

$$f_j = \sum_{k_j=0}^{2^j-1} c_{k_j}^j \phi(2^j x - k_j)$$

を計算することによって、離散標本値関数  $f_J$  は

$$f_J = w_{J-1} + \dots + w_j + f_j$$

と分解することができる。

#### 4.4.2 ウェーブレット逆変換の再構成アルゴリズム

節 4.4.1 のウェーブレット変換の分解アルゴリズムでみたように、関数  $f$  を欲するスケール  $J$  で標本化 (離散化) して得られる係数の組  $\{c_k^J\}_k$  から、 $f_J$  を  $w_{J-1} + \dots + w_0 + f_0$  と dyadic 階段関数の和として表すための係数  $c_0^0$  ( $f_0$  の係数) および係数集合の組  $\{d_\ell^j\}_{0 \leq j < J-1, \ell=0, \dots, 2^j-1}$  (詳細関数  $\{w_j\}$  の係数) が得られる。これがウェーブレット変換である。この過程は逆にたどることができ、その操作をウェーブレット逆変換 (inverse wavelet transformation) という。よう。

信号処理とは、関数  $f_J$  (これは  $f$  と同一視しているのだが) を処理目的に応じて関数  $f'_j$  として近似する操作である。処理目的として、たとえば、ノイズの除去やデータ圧縮がある。したがって、Haar 分解における信号処理とは、係数集合  $\{c_k^0\}_k, \{d_\ell^j\}_{0 \leq \ell < J, k}$  を目的に応じて別の係数集合、 $\{c_k^0\}_k$  および  $\{d'_k{}^j\}_{0 \leq j < J, k}$  に置き換えることによって近似関数  $f'_J$  を構成することに他ならない。これをウェーブレット逆変換にともなう再構成アルゴリズムという。

補題 4.45 はスケール  $j$  の Haar 関数を粗いスケール  $j-1$  の関数で表す関係式である。この関係は可逆な関係

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x-1)$$

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1)$$

にあり、次の補題が成立する。

#### 補題 4.48

$$\phi(2^{j-1}x) = \psi(2^j x) + \phi(2^j x - 1) \quad (4.19)$$

$$\psi(2^{j-1}x) = \phi(2^j x) - \phi(2^j x - 1) \quad (4.20)$$

定理 4.49 (Haar 再構成定理) スケール  $J$  の関数  $f_J$  が  $f_J = w_{J-1} + w_{J-2} + \cdots + w_0 + f_0$  と分解できて

$$w_j(x) = \sum_k d_k^j \psi(2^j x - k) \in W_j, \quad 0 \leq j < J$$

$$f_0(x) = \sum_k c_k^0 \phi(x - k)$$

であるとする。このとき、 $f_J$  は

$$f_J(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_\ell^J \phi(2^J x - \ell) \in V_J$$

と再構成できる。ここで、 $c_\ell^j$  は  $j = 1$  から  $j = J$  まで次のアルゴリズムによって再帰的に定められる。

$$c_\ell^j = \begin{cases} c_k^{j-1} + d_k^{j-1}, & \ell = 2k \text{ が偶数,} \\ c_k^{j-1} - d_k^{j-1}, & \ell = 2k + 1 \text{ が奇数.} \end{cases} \quad (4.21)$$

証明 補題 4.48 を使うと

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sum_k c_k^0 \phi(x - k) \\ &= \sum_k c_k^0 \phi(2x - 2k) + c_k^0 \phi(2x - 2k - 1) \\ &= \sum_\ell \tilde{c}_\ell^1 \phi(2x - \ell) \end{aligned}$$

ただし、

$$\tilde{c}_\ell^1 = \begin{cases} a_k^0, & \ell = 2k \text{ が偶数} \\ a_k^0, & \ell = 2k + 1 \text{ が奇数.} \end{cases}$$

同様にして、

$$\begin{aligned} w_0(x) &= \sum_k d_k^0 \psi(x - k) \\ &= \sum_k d_k^0 \phi(2x - 2k) - c_k^0 \phi(2x - 2k - 1) \\ &= \sum_\ell \tilde{d}_\ell^1 \phi(2x - \ell) \end{aligned}$$

ただし、

$$\tilde{d}_\ell^1 = \begin{cases} d_k^0, & \ell = 2k \text{ が偶数} \\ -d_k^0, & \ell = 2k + 1 \text{ が奇数.} \end{cases}$$

したがって

$$f_0(x) + w_0(x) = \sum_\ell c_\ell^1 \phi(2x - \ell)$$

とすると

$$c_\ell^1 = \tilde{c}_\ell^1 + \tilde{d}_\ell^1 \begin{cases} c_k^0 + d_k^0, & \ell = 2k \text{ が偶数} \\ c_k^0 - d_k^0, & \ell = 2k + 1 \text{ が奇数.} \end{cases}$$

を得る。さらに、 $w_1 = \sum_k d_k^1 \psi(2x - k)$  についても同様に考えると

$$f_2(x) = f_0(x) + w_0(x) + w_1(x) = \sum \ell c_\ell^2 \phi(2^2 x - \ell)$$

として

$$c_\ell^2 = \tilde{c}_\ell^2 + \tilde{d}_\ell^2 \begin{cases} c_k^2 + d_k^2, & \ell = 2k \text{ が偶数} \\ c_k^2 - d_k^2, & \ell = 2k + 1 \text{ が奇数.} \end{cases}$$

を得る。この過程を  $f_J = f_{J-1} + w_{J-1}$  まで再帰的に繰り返して結果を得る。 ■

### 4.4.3 具体例

次の関数を考えてみよう。

$$f(x) = \sin(2x) \cos(x^3) + \left( \frac{\sin(110(x-2))}{110(x-2)} \right)^2 - \left( \frac{\sin(95(x-1))}{95(x-1)} \right)^2 \quad (4.22)$$

区間  $[0, \pi]$  での様子 (図 4.3) を観察すると、狭い区間での急激な関数値の変化 (スパイク) が二箇所  $x = 1$  および  $x = 2$  の付近にあることがわかる。

区間  $[0, \pi]$  を  $N = 2^8 = 254$  個のスケール  $J = 8$  の dyadic 区間  $\{I_{8,k}\}_k$  に分割し、その左端  $x = \frac{k}{2^8}$ , ( $k = 0, \dots, 2^8 - 1$ ) で標本化した関数値の組を  $\{c_k^8 = f(\frac{k}{2^8})\}_{k=0, \dots, 2^8-1}$  とする。Mathematica では、段階  $j$  のスケール関数  $\phi(2^j x - k)$  を HaarScale[x, j, k]、関数  $f(x)$  を spiked[x] で定義しておく、標本値の組  $\{c_k^8\}$  を coeff として求めて次のようにしてスケール  $J = 8$  の階段関数を表示できる。ここで、Mathematica の添字が 1 から始まることを考慮して、coeff[k + 1] としていることに注意しよう。

```
HaarScale[x_Real, j_Integer, k_Integer] := If[x < k/2^j || (k + 1)/2^j < x, 0, 1]
j=8;
coeff = Table[N[spiked[t]], {t, 0, Pi, Pi/(2^j - 1)}];
spiked[x_Real] := Sum[coeff[[k + 1]] HaarScale[x, j, k], {k, 0, 2^j - 1}]
Plot[dspiky[x], {x, 0, 1}]
```

このとき、スケール  $J = 8$  の標本値の組  $\{c_k^8\}$  から、奇数番目の係数リストを oddCoeff、偶数番目の係数リストを evenCoeff として、段階  $J - 1 = 7$  の平均化関数  $f_7(x)$  を averaged[x]、詳細関数  $w_7(x)$  を detailed[x] としたとき、これらを次のように求めることができる。ただし、Mathematica の添字が 1 から始まることから、0 から添字が始まるリスト even と odd における even - odd は Mathematica では odd - even となることに注意しよう。また、[[...]] 内の添字指定 i;;j;;2 は、 $i$  から  $j$  までのステップ 2 による範囲を表す。

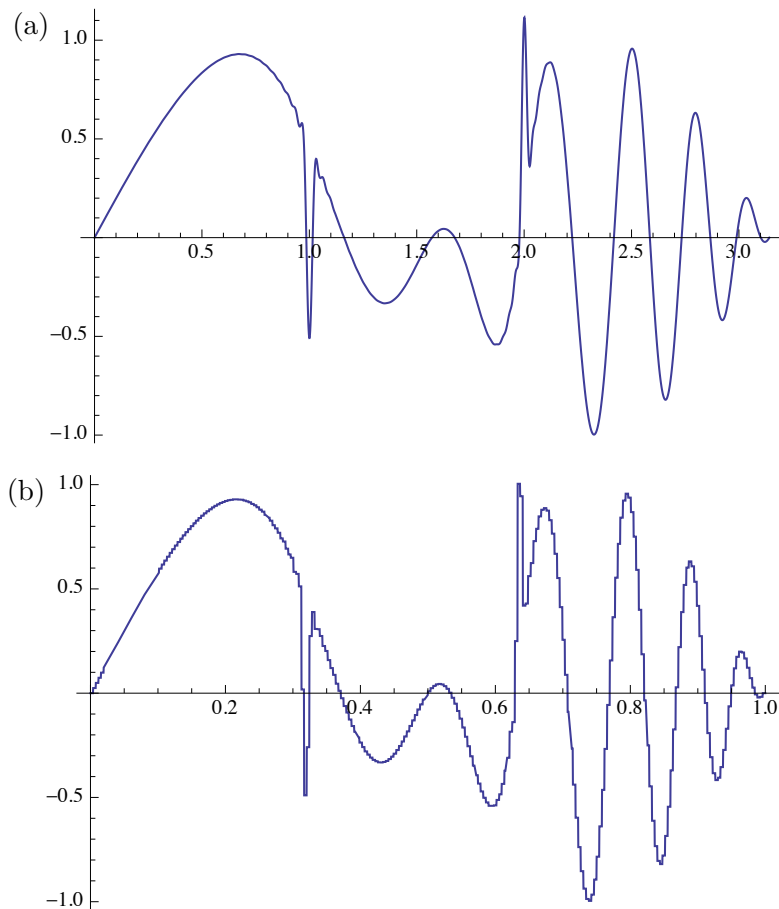


図 4.3 (a)  $f(x) = \sin(2x) \cos(x^3) + \left(\frac{\sin(110(x-2))}{110(x-2)}\right)^2 - \left(\frac{\sin(95(x-1))}{95(x-1)}\right)^2$  の区間  $[0, \pi]$  での様子。狭い区間での急激な関数値の変化 (スパイク) が二箇所  $x = 1$  および  $x = 2$  の付近に見られる。(b) 区間  $[0, \pi]$  を  $2^8$  個に分割して各左端で標本化した値  $\{f(\frac{k\pi}{2^8})\}_{k=0, \dots, 2^8-1}$  を区間  $[0, 1]$  上の関数  $f(\pi x)$  の解像度  $2^{-8}$  での標本値とした階段関数の様子。

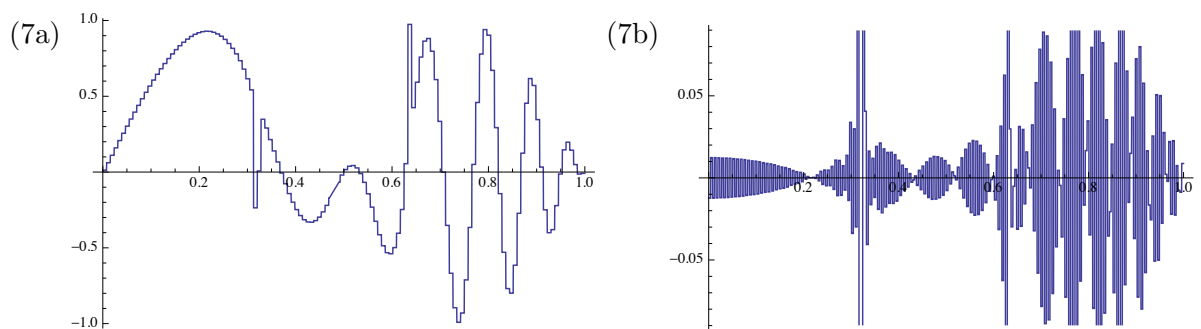


図 4.4 (7a) 式 (4.22) の関数をスケール  $J = 8$  で標本化した階段関数  $f_8$  の平均化関数  $f_7(x)$  と (7b) 詳細化関数  $w_7(x)$ . この図では  $w_7(x)$  の一部の値が図範囲を越えている。

```

Haarwavelet[x_Real, j_Integer, k_Integer] :=
  HaarScale[x, j + 1, 2 k] - HaarScale[x, j + 1, 2 k + 1]
oddCoeff = coeff[[1 ;; Length[coeff] ;; 2]];
evenCoeff = coeff[[2 ;; Length[coeff] ;; 2]];
aveCoeff = (evenCoeff + oddCoeff)/2;
diffCoeff = (oddCoeff - evenCoeff)/2;
detailed7[x_Real] :=
  Sum[diffCoeff[[k + 1]] Haarwavelet[x, 7, k], {k, 0, 2^7 - 1}]
averaged7[x_Real] :=
  Sum[aveCoeff[[k + 1]] HaarScale[x, 7, k], {k, 0, 2^7 - 1}]

```

段階  $j = 7$  での関数の和  $\text{detailed7}[x] + \text{averaged7}[x]$  は元の関数  $\text{dspiked}[x]$  となる (図 4.4)。同様な手順によって、段階  $j = 6 \sim 0$  までの平均化関数と詳細関数を図 4.5 および図 4.6 に示した。

平均化関数  $\{f_\ell\}$  だけを観察してみよう。標本化から得られた dyadic 区間  $I_{8,k}$  上の階段関数  $f_8$  は、 $f_7$  では倍の dyadic 区間  $I_{7,k} = I_{8,2k} \cup I_{8,2k+1}$  上で左右区間における係数  $c_{2k}^8$  と  $c_{2k+1}^8$  の平均値  $\frac{1}{2}(c_{2k}^8 + c_{2k+1}^8)$  を取る。 $f_6$  ではさらに倍の区間上で隣り合う係数の平均値  $\frac{1}{2}(c_{2k'}^7 + c_{2k'+1}^7)$  というように、 $f_5, f_4, f_3, f_2, f_1$  と次々に階段の幅が倍々に広がっていく。 $f_0$  に至っては全区間  $[0, 1)$  での平均値となっている (図 4.6)。解像度  $2^{-\ell}$  を持つスケール  $\ell$  が小さい  $f_\ell$  になるにつれて、元の関数  $f$  の近似は粗くなって、 $f_0$  で平ら (全区間平均) になってしまう。

一方、関数  $f$  の粗視化を逆に辿ると、図 4.6(0) で  $f_0 + w_0$  が (1) の  $f_1$  になること、(2) で  $f_1 + w_1$  が (2) の  $f_2$  となることその数値からも確かめられる。これが再構成アルゴリズムで、 $f_{\ell+1} = f_\ell + w_\ell (0 \leq \ell < j)$  を与える。

演習 4.50 図 4.3、図 4.4、図 4.5 および図 4.6 を描いてみなさい。

(ヒント): 与えられたスケール  $J$  の関数  $f_J$  の Haar 分解  $f_J = w_{J-1} + \cdots + w_{J-k} + f_{J-k}$  において、 $f_{J-k}(x) = \text{averagedHaarScaling}[x, k]$  および  $w_{J-k}(x) = \text{HaarWaveletElement}[x, k]$  の計算のために次のように Mathematica 関数を定義してもよい (ただし、スケール  $J$  の係数の組  $\{c_k^J\} = \text{coeff}$  が与えられていて段階  $J - k$  の Haar 分解係数リスト  $\{c_\ell^{J-k}\}, \{d_\ell^{J-k}\}$  を得て関数  $f_{J-k}, w_{J-k}$  を構成するために  $1 \leq k \leq J$  の範囲で引数  $k$  が与えられている)。ただし、このやり方はたいへん効率が悪く、逐次的に求められる途中の段階  $0 \leq j \leq J - k$  の係数  $\{c_\ell^j\}$  や  $\{d_\ell^j\}$  を毎回その都度計算してしまっている。

```

averagedHaarScaling[x_Real, k_Integer] :=
Module[{cf, n, oddc, evenc, avecf, j, i},
  (* coef=Table[N[f[x]], {x, a, b, (b-a)/(2^n-1)}]; *)
  cf = coeff;
  n = Log[2, Length[coeff]];
  For[j = 0, j < k, j++,
    oddc = cf[[1 ;; 2^(n - j) ;; 2]];
    evenc = cf[[2 ;; 2^(n - j) ;; 2]];
    avecf = (oddc + evenc)/2;
    cf = avecf;
  ];
  Sum[cf[[i + 1]] HaarScale[x, n - k, i], {i, 0, 2^(n - k) - 1}]

```

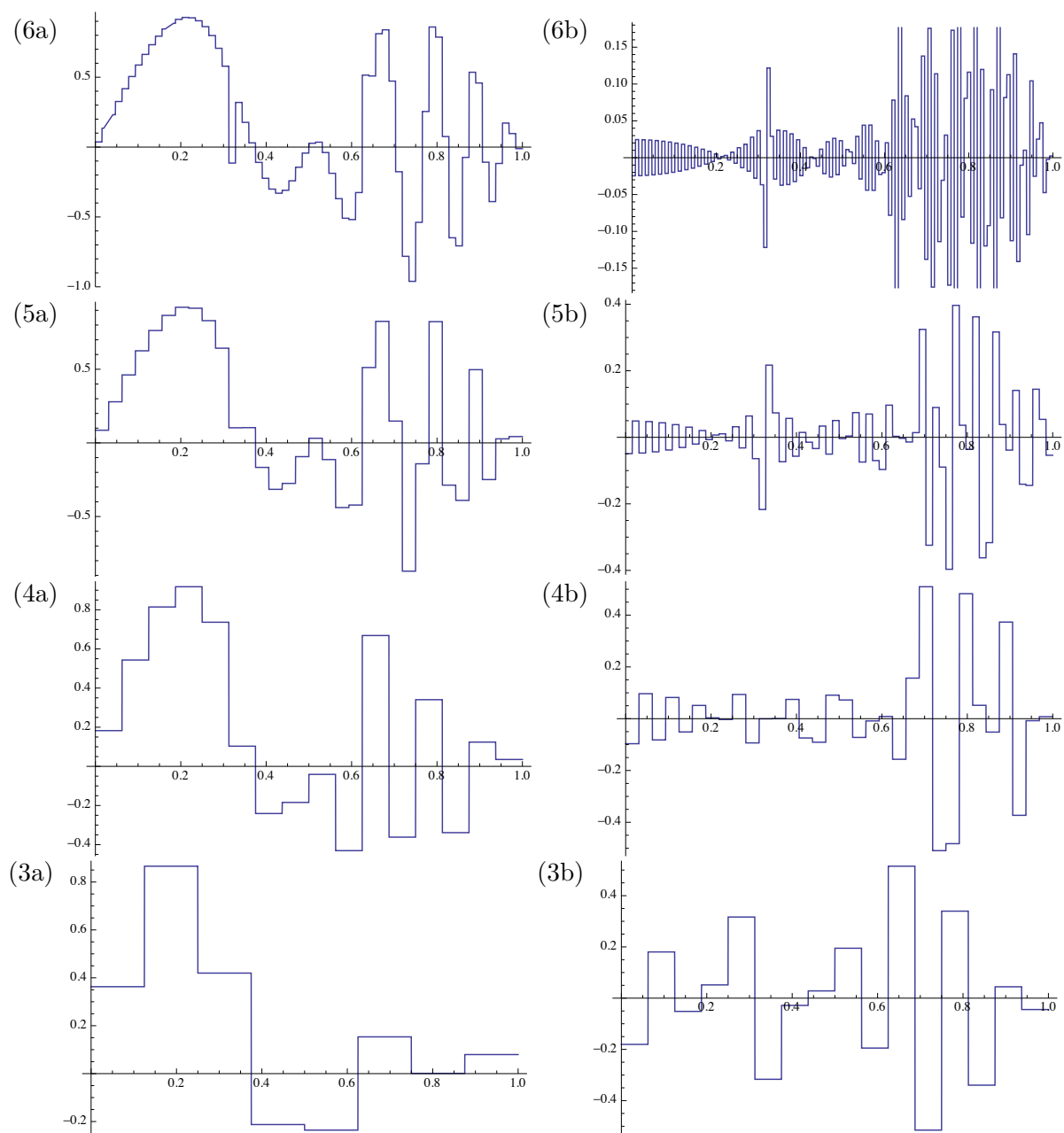


図 4.5 式 (4.22) の関数をスケール  $J = 8$  で標準化した階段関数  $f_8$  の平均化関数と詳細関数。(6)  $f_6$  と  $w_6$ , (5)  $f_5$  と  $w_5$ , (4)  $f_4$  と  $w_4$ , (3)  $f_3$  と  $w_3$ .

]

```
HaarWaveletElement[x_Real, k_Integer] :=
Module[{cf, n, oddc, evenc, avecf, diffcf, j, i},
  (* coef=Table[N[f[x]], {x, a, b, (b-a)/(2^n-1)}]; *)
  cf = coeff;
  n = Log[2, Length[coeff]];
  For[j = 0, j < k, j++,
```

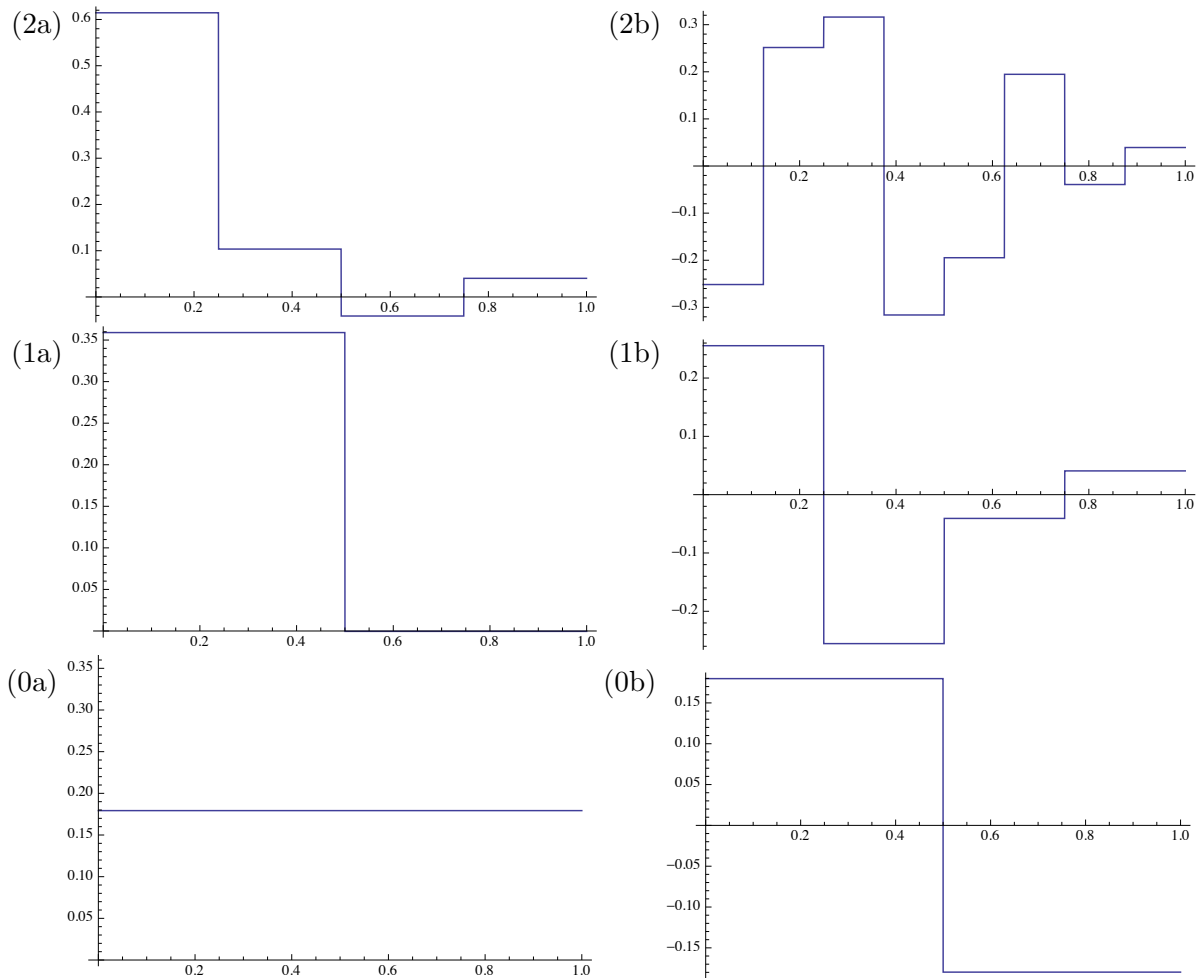


図 4.6 式(4.22)の関数をスケール  $J = 8$  で標準化した階段関数  $f_8$  の平均化関数と詳細関数。(2)  $f_2$  と  $w_2$ , (1)  $f_1$  と  $w_1$ , (0)  $f_0$  と  $w_0$ .

```

oddc = cf[[1 ;; 2^(n - j) ;; 2]];
evenc = cf[[2 ;; 2^(n - j) ;; 2]];
avecf = (oddc + evenc)/2;
cf = avecf;
];
diffcf = (oddc - evenc)/2;
Sum[diffcf[[i + 1]] Haarwavelet[x, n - k, i], {i, 0,
  2^(n - k) - 1}]
]

```

たとえば、図 4.5(3) を

```

Plot[averagedHaarScaling[x, 5], {x, 0, 1}]
Plot[HaarWaveletElement[x, 5], {x, 0, 1}]

```

で描くことができ、 $\text{HaarWaveletElement}[x, 4]$  が  $\text{HaarWaveletElement}[x, 5] + \text{averagedHaarScaling}[x,$

5] に等しいことが確かめられる。

## 4.5 高速ウェーブレット変換

ウェーブレット変換においては係数の組  $\{c_k^j\}$  および  $\{d_k^j\}$  だけが本質的である。スケーリング関数や wavelet 関数は、定理 4.47 のように、係数の組を使って関数  $f_j$  を  $f_j(x) = w_{j-1}(x) + f_{j-1}(x)$  と Haar 分解して近似関数  $\{f_j\}$  を具体的に構成するときに必要なになる。これらは式 (4.16) と (4.17)、つまり

$$c_k^j = \frac{c_{2k}^{j+1} + c_{2k+1}^{j+1}}{2}, \quad (4.16)$$

$$d_k^j = \frac{c_{2k}^{j+1} - c_{2k+1}^{j+1}}{2}. \quad (4.17)$$

の関係式を  $\begin{matrix} c_{k_{j+1}}^{j+1} & \rightarrow & c_{k_j}^j \\ d_{k_{j+1}}^{j+1} & \searrow & d_{k_j}^j \end{matrix}$  と表わすことにすると、最初にスケール  $J$  で標本化して得られる  $2^J$  個の組  $\{c_k^J\}$  から、式 (4.16) と (4.17) を次々と適用して、 $\{c_k^{J-1}\} \rightarrow \{c_k^{J-2}\} \rightarrow \dots$  というようにしてカスケード (4.18) のようにして、最後には係数  $c_0^0$  と  $d_0^0$  を求めていく。これが Wavelet 変換である。

1 段階 wavelet 変換(93 ページ)で注意したように、与えられたスケール  $J$  における段階  $j$  ( $J-1 \geq j \geq 0$ ) までに得られた Haar 関数系の係数の組  $\{\{d_{k_{j-1}}^{j-1}\}, \dots, \{d_{k_j}^j\}, \{c_{k_j}^j\}\}$  の要素総数は最初の標本数  $2^J$  のままで変わらない。この事実を利用して、Haar ウェーブレット変換の分解係数を効率的に求める高速アルゴリズムを考えよう。

最初に与えるスケール  $J$  の標本係数の組  $\{c_k^J\}_{k=0, \dots, 2^J-1}$  を長さ  $2^J$  の配列 data に格納しておく。1 段階 wavelet 変換の各段階  $j$  ( $0 \leq j \leq J-1$ ) で、配列要素をつぎのように更新するとしよう (以下は  $J=3$  の場合の段階 0 までの配列変化を示している)。また、記号 ‘ $\widehat{\phantom{x}}$ ’ のついた要素は新たに値が代入された配列要素を表している。

$$\begin{array}{c} j=3 \quad [c_0^3 \quad c_1^3 \quad c_2^3 \quad c_3^3 \quad c_4^3 \quad c_5^3 \quad c_6^3 \quad c_7^3] \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ j=2 \quad [\widehat{c}_0^2 \quad \widehat{d}_0^2 \quad \widehat{c}_1^2 \quad \widehat{d}_1^2 \quad \widehat{c}_2^2 \quad \widehat{d}_2^2 \quad \widehat{c}_3^2 \quad \widehat{d}_3^2] \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ j=1 \quad [\widehat{c}_0^1 \quad d_0^2 \quad \widehat{d}_0^1 \quad d_1^2 \quad \widehat{c}_1^1 \quad d_2^2 \quad \widehat{d}_1^1 \quad d_3^2] \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ j=0 \quad [\widehat{c}_0^0 \quad d_0^2 \quad d_0^1 \quad d_1^2 \quad \widehat{d}_0^0 \quad d_2^2 \quad d_1^1 \quad d_3^2] \end{array}$$

1 段階 wavelet 変換後の段階  $j-1$  における配列要素 data は、段階  $j$  における配列 data を使って

$$\text{各 } k \text{ について } \text{tmp} \leftarrow \text{data}[2^{J-j+1}k]$$

$$c_k^{j-1} \text{ として } \text{data}[2^{J-j+1}k] \leftarrow \frac{1}{2} (\text{tmp} + \text{data}[2^{J-j+1}k + 2^{J-j}])$$

$$d_k^{j-1} \text{ として } \text{data}[2^{J-j+1}k + 2^{J-j}] \leftarrow \frac{1}{2} (\text{tmp} - \text{data}[2^{J-j+1}k + 2^{J-j}]) \quad k = 0, \dots, 2^{j-1} - 1$$



として得られる。これより、段階  $j = 0$  までの Haar ウェーブレット係数を求める高速ウェーブレット変換アルゴリズムが得られる。

命題 4.51 (高速ウェーブレット変換) スケール  $J$  の  $2^J$  個の標本係数の組  $\{c_k^J\}_{k=0,\dots,2^J-1}$  が長さ  $2^J$  の配列 data に代入  $\text{data} \leftarrow \{c_k^J\}$  されている。このとき、近似度を上げながら段階  $j = 0$  までの Haar ウェーブレット係数を求めるウェーブレット変換アルゴリズムは次のようである。

```

for j = J to 1
  for k = 0 to 2^(j-1) - 1
    tmp <- data[2^(J-j+1)k]
    data[2^(J-j+1)k] <- (tmp + data[2^(J-j+1)k + 2^(J-j)]) / 2
    data[2^(J-j+1)k + 2^(J-j)] <- (tmp - data[2^(J-j+1)k + 2^(J-j)]) / 2

```

このアルゴリズムによって得られる長さ  $2^J$  の配列 data において、段階  $j (0 \leq j \leq J-1)$  までの係数の組  $\{\{d_{k_{j-1}}^{j-1}\}, \dots, \{d_{k_j}^j\}, \{c_{k_j}^j\}\}$  は次の関係にある。

$$\begin{aligned} \{c_{k_j}^j\} &= \{\text{data}[2^{J-j}k_j]\}, \quad k_j = 0, \dots, 2^j - 1 \\ \{d_{k_j}^j\} &= \{\text{data}[2^{J-j}k_j + 2^{J-j-1}]\}. \end{aligned}$$

注意 4.52 この計算アルゴリズムに必要な空間量は、与えられる最初のスケール  $J$  の係数  $\{c_k^J\}$  を格納する  $2^J$  個の配列 data[ ] と 1 個の変数 tmp に必要な総計  $2^j + 1$  個のメモリである。計算量は  $\text{data}[2^{(J-j+1)k}]$  および  $\text{data}[2^{(J-j+1)k} + 2^{(J-j)}]$  を計算するために必要な足し算が  $2 \times (1 + 2^1 + \dots + 2^{J-1}) = 2^{J+1}$  回である。

注意 4.53 このテキストで紹介するアルゴリズムはリスト (配列) の先頭位置を 0 からとしている。しかしながら、Mathematica ではリストの先頭位置は 1 から始まることに注意する。

一方、Haar 再構成定理 4.49 の式 (4.21) によって、段階  $j (0 \leq j \leq J-1)$  で得られた Haar 関数系の係数の組  $\{\{d_{k_{j-1}}^{j-1}\}, \dots, \{d_{k_j}^j\}, \{c_{k_j}^j\}\}$  から

$$c_{2k}^j = c_k^{j-1} + d_k^{j-1}, \quad k = 0, \dots, 2^{j-1} - 1 \quad (4.23)$$

$$c_{2k+1}^j = c_k^{j-1} - d_k^{j-1} \quad (4.24)$$

を逐次的に適用して、元の  $2^J$  個の標本化係数の組  $\{c_k^J\}_{k=0,\dots,2^J-1}$  を復元することができる。これより、段階  $j$  まで Haar ウェーブレット変換によって求められた Haar 関数系の係数の組から、元の標本化係数の組  $\{c_k^J\}$  を復元する高速逆ウェーブレット変換アルゴリズムが得られる。

命題 4.54 (高速逆ウェーブレット変換) 段階  $j$  まで Haar ウェーブレット変換によって求められた Haar 関数系の係数の組が長さ  $2^J$  の配列 data に代入  $\text{data} \leftarrow \{\{d_{k_{j-1}}^{j-1}\}, \dots, \{d_{k_j}^j\}, \{c_{k_j}^j\}\}$  されている。このとき、元のスケール  $J$  の標本化係数  $\{c_k^J\}$  を復元する逆ウェーブレット変換アルゴリズムは次のようである。

```

for j = 0 to J-1

```

```

for k = 0 to 2^j - 1
  tmp <- data[2^(J-j)k]
  data[2^(J-j)k] <- tmp + data[2^(J-j)k + 2^(J-j-1)]
  data[2^(J-j)k + 2^(J-j-1)] <- tmp - data[2^(J-j)k + 2^(J-j-1)]

```

演習 4.55 節 4.4.3 の具体例において、スケール  $J$  の関数  $f_J$  を  $f_J = w_{J-1} + \dots + w_{J-k} + f_{J-k}$  というように Haar 分解する高速ウェーブレット変換を使う Mathematica プログラムを書きなさい。

#### 4.5.1 平均化係数の左詰配置

個数  $2^J$  個の係数の組  $\{c_k^J\}$  から、1 段階 wavelet 変換を繰り返して、 $2^j$  個の  $j$  段階 ( $1 \leq j \leq J$ ) の平均化係数の組  $\{c_k^j\}$  からそれぞれ  $2^{j-1}$  個の段階  $j-1$  の平均化係数の組  $\{c_k^{j-1}\}$  および詳細係数の組  $\{d_k^{j-1}\}$  を求めることが wavelet 変換である。高速 wavelet 変換アルゴリズムは  $2^J$  個の係数の組  $\{\{d_k^{J-1}\}, \dots, \{d_k^1\}, d_0^0, c_0^0\}$  は空間計算量の観点から効率的であった。

$\{c_k^j\} \rightarrow \{c_k^{j-1}\} \cup \{d_k^{j-1}\}$  において、 $\{c_k^j\}$  を長さ  $2^j$  の連続する配列に収納し、1 段階 wavelet 変換後に得られる  $2j-1$  個の隣り合う 2 個の係数を平均化した組  $\{c_k^{j-1}\}$  を同じ配列領域に左詰めに、 $2^{j-1}$  個の隣り合う 2 個の係数の平均からのズレの組  $\{d_k^{j-1}\}$  を右詰めに配置することを考えてみよう。この係数配置の仕方を平均化係数の左詰配置と呼ぼう。

平均化係数の左詰配置法をとると、段階  $j$  まで 1 段階 wavelet 変換を繰り返したとき、大きさ  $2^J$  の配列は次の順に係数が並ぶ。

$$\left\{ \{c_{k_j}^j\}_{0 \leq k_j \leq 2^j - 1}, \{d_{k_j}^j\}_{0 \leq k_j \leq 2^j - 1}, \{d_{k_{j-1}}^{j-1}\}_{0 \leq k_{j-1} \leq 2^{j-1} - 1}, \dots, \{d_{k_{J-1}}^{J-1}\}_{0 \leq k_{J-1} \leq 2^{J-1} - 1} \right\}.$$

平均係数の左詰配置は、節 5.3 でみるように、係数データの視覚化に意味があるような画像データを取り扱う場合に都合がよい。



## 第5章

# 離散 Haar 系

### 5.1 離散 Haar 関数系

先の演習 4.50 で、与えられたスケール  $J = 8$  の  $2^J$  個の係数の組  $\{c_k^J\}$  から関数  $f_J$  の Haar 分解  $f_J = w_{J-1} + \dots + w_{J-k} + f_{J-k}$  を計算して各関数  $w_{J-k}(x)$  を描くためには相応の時間がかかる。この計算に必要な主要な部分は、完全な Haar 分解係数の組  $\{c_k^j\}_{j=0, \dots, J-1}$ ,  $\{d_k^j\}_{j=0, \dots, J-1}$  を得るための計算でなく、dyadic 区間上で定数である区分的に連続な階段関数の扱いに費やされ、特に描画する際は相当時間を要する。このままでは、与えられたスケール  $J$  が実用域における計算を行うことは事実上不可能である。

計算の高速化は実用的にも理論的にも追求されるべきことがらである。たとえば、サンプリング周波数 4,4100Hz の CD 音質で標本化したスケール 19 ( $2^{19}$  個) のモノラル音声データは時間的には  $2^{19}/44100 = 11.9[\text{sec}]$  に相当する。また、一片  $512 = 2^9$  ピクセルのグレースケール正方形画は  $2^{9+9} = 262144$  つまりスケール 18 のデータに相当する。計算の高速化は Fourier 変換の場合と同様に、まず基底関数の離散化、次いで、諸計算のアルゴリズム自体の改良によって達成される。ここでは、Haar 関数系の離散化を考えよう。

コンパクトサポート  $[a, b)$  で定義された関数  $f(x)$  をスケール  $J$  で標本化するとは、区間  $[a, b)$  を  $2^J$  当分して  $x = a + k \frac{b-a}{2^J}$  ( $k = 1, \dots, 2^J - 1$ ) における  $2^J$  個の関数値の組

$$\{c_k^J\}_{k=0, \dots, 2^J-1}, \quad c_k^J = f\left(a + k \frac{b-a}{2^J}\right)$$

を採取することである。右端の標本値  $c_{2^J-1}^J$  は  $x = b - \frac{b-a}{2^J}$  での値  $f\left(b - \frac{b-a}{2^J}\right)$  であることに注意しよう。区間  $[a, b)$  上の関数  $f(x)$  をこの  $2^J$  個の標本値  $\{c_k^J\}$  によって階段関数によって近似することと、解像度  $2^{-J}$  で区間  $[0, 1)$  上の階段関数

$$\hat{f}_J(x) = \sum_{k=0}^{2^J-1} c_k^J \phi(2^J x - k)$$

を考えることは同等である(式 (4.13) 参照)。実際、図 4.3(b) は、こうして区間  $[0, \pi)$  上の関数を標本化して係数の組  $\{c_k^J\}$  を得て、 $[0, 1)$  の関数として表している。以下、 $[a, b)$  上の関数  $f$  をこうして同一視した  $[0, 1)$  上の関数  $\hat{f}$  を同じ記号  $f$  で表そう。

このようにして  $[0, 1)$  上の関数  $f$  をスケール  $J$  で標本化すると、区間  $[0, 1)$  の関数  $f$  は  $2^J$  個の関数値の点列  $f = (c_0^J, \dots, c_{2^J-1}^J)$  に置き換わる。これが  $[0, 1)$  上の関数  $f$  の離散化 (discretization) である。

Haar 関数系の離散化において、もとの関数の定義域  $[0, 1)$  を等分割して  $2^J$  個の関数値  $\{c_k^J\}$  を標本値として与え、各段階  $0 \leq j \leq J$  において、隣り合う要素を足して 2 で割って得られる平均化関数値の組  $\{c_k^j\}$  は同じく Haar 分解定理 4.47 の式 (4.16) から求められるようにしたい。つまり、離散化された Haar 関数系においても、この平均化操作は段階を  $J-1$  から 0 へと下げるにつれて平均化にあずかる要素数が倍々に広がり、段階 0 に至って全要素を平均化するようにしたいのである。

同時に、この分解過程は可逆で、平均からのズレを与える式 (4.17) の詳細係数  $\{d_k^j\}$  を合わせて使って Haar 再構成定理 4.49 の式 (4.21) から元の係数の組  $\{c_k^J\}$  を再構成できねばならない。

以上の準備的考察から、 $[0, 1)$  上の Haar 関数系に対応した解像度  $2^{-J}$  における離散 Haar 関数系 (ベクトル系) を次のように定義する (図 5.1)。

**定義 5.1** (離散 Haar ベクトル系) 与えられたスケール  $J$  で定まる長さ  $2^{J+1}$  のベクトルであって

- (1) その要素が次で与えられるベクトルを離散 Haar スケーリング関数  $\phi_J(j, k)$  と定義する。

$$\phi_J(j, k) = \left( \underbrace{0 \dots 0}_{k2^{J+1-j}} \underbrace{1 \dots 1}_{2^{J+1-j}} \underbrace{0 \dots 0}_{2^{J+1} - (k+1)2^{J+1-j}} \right), \quad (0 \leq j \leq J, 0 \leq k < 2^j - 1) \quad (5.1)$$

- (2) その要素が次で与えられるベクトルを離散 Haarwavelet 関数  $\psi_J(j, k)$  定義する。

$$\psi_J(j, k) = \left( \underbrace{0 \dots 0}_{k2^{J+1-j}} \underbrace{1 \dots 1}_{2^{J-j}} \underbrace{-1 \dots -1}_{2^{J-j}} \underbrace{0 \dots 0}_{2^{J+1} - (k+1)2^{J+1-j}} \right), \quad (0 \leq j \leq J, 0 \leq k < 2^j - 1) \quad (5.2)$$

**注意 5.2**  $\phi_J(0, 0)$  と  $\psi_J(0, 0)$  はそれぞれ  $[0, 1)$  上の  $\phi(x)$  および  $\psi(x)$  に相当する。関数変化の観点からは常に  $\psi(2^j x)$  は  $\phi(2^j x)$  の倍の解像度を持っており、 $\psi(2^j x)$  は幅  $\frac{1}{2^j}$  の区間内の左右で値が  $\pm 1$  を取ることから、スケール  $J$  の離散 Haar 系のベクトル長を  $2^{J+1}$  としている。実際、段階  $j$  の離散 Haar 関数系 (ベクトル系)  $\phi_J(j, k)$  および  $\psi_J(j, k)$  の  $2^{J+1}$  個の要素を位置  $x = \frac{k}{2^{J+1}}, k = 0, \dots, 2^{J+1} - 1$  にプロットし (図 5.1) さらに各点から長さ  $2^{-(J+1)}$  の水平線を引いて得られる関数のグラフは、 $0 \leq j \leq J$  についての区分的に連続な Haar 関数系  $\phi(2^j x - k)$  および  $\psi(2^j x - k)$  のグラフに一致する。

スケール  $J$  で定まる長さ  $2^{J+1}$  を持つ離散 Haar ベクトル系の内積を、式 (1.1) のベクトル内積で定義する。このとき、離散 Haar 関数系においても定理 4.33 と同等な直交関係が成立する。

**定理 5.3** スケール  $J$  の離散 Haar 関数系は直交ベクトル系であり、次が成立する。

- (1)  $V_j^J = \text{span}\{\phi_J(j, k)\}_{k=1, \dots, 2^j-1}$  を張る基底ベクトルの組に関する直交性

$$\langle \phi_J(j, k) | \phi_J(j, k') \rangle = 2^{J+1-j} \delta_{kk'}, \quad (0 \leq j < J, 0 \leq k, k' < 2^j - 1).$$

- (2) ベクトル空間の組  $\{W_j^J\}_{j=0, \dots, J} = \{\text{span}\{\psi_J(j, k)\}_{k=1, \dots, 2^j-1}\}_{j=0, \dots, J}$  を張る各基底ベクトルの組に関する直交性と、それらベクトル空間の直交性  $W_j^J \perp W_{j'}^J$

$$\langle \psi_J(j, k) | \psi_J(j', k') \rangle = 2^{J+1-j} \delta_{jj'} \delta_{kk'}, \quad (0 \leq j, j' < J, 0 \leq k < 2^j - 1, 0 \leq k' < 2^{j'} - 1).$$

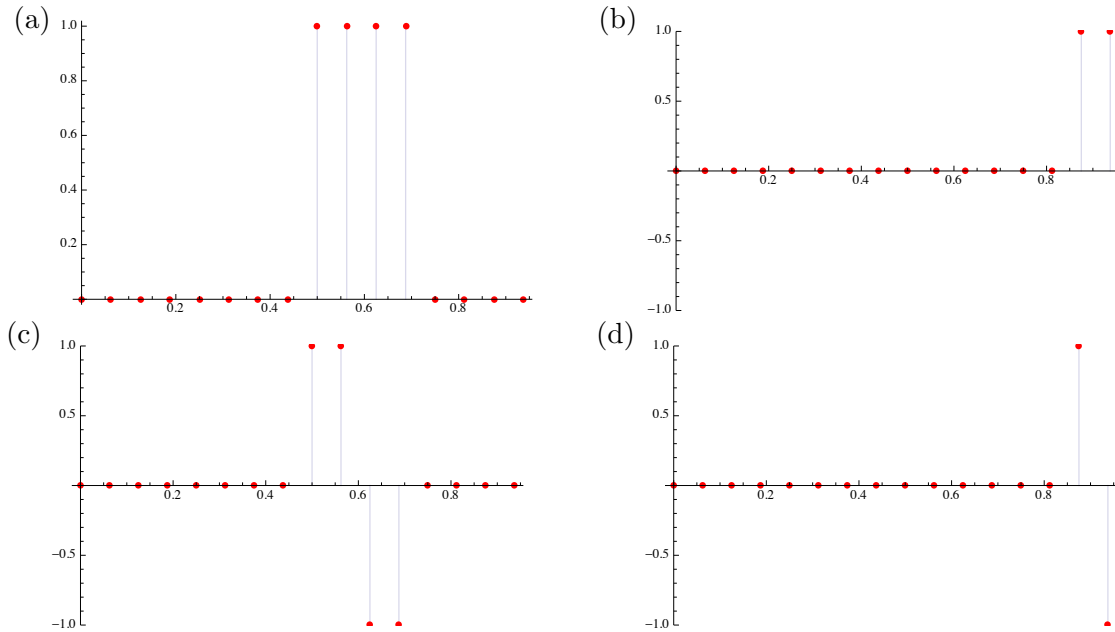


図 5.1 (a) スケール  $J = 3$  での離散 Haar スケール関数  $\phi_3(2, 2)$ , (b)  $\phi_3(3, 7)$ . (c) 離散 Haar wavelet 関数  $\psi_3(2, 2)$ , (d)  $\psi_3(7, 3)$ . スケール  $J = 3$  では  $2^{J+1} = 16$  点がプロットされている。サポートは点  $k2^{J+1-j} + 1$  番目から  $(k + 1)2^{J+1-j}$  番目までである ( $k = 0, \dots, 2^j - 1$ )。最大解像度  $2^{-J}$  に相当する離散スケール関数は  $\phi_J(J, k)$ 、また離散 wavelet 関数は  $\psi_J(J, k)$  で、これより「細かい」 $\phi_J(j, k)$  や  $\psi_J(j, k)$  はない。図では、位置  $x = \frac{k}{2^{J+1}}, k = 0, \dots, 2^{J+1} - 1$  にプロットしている。

(3)  $\{\phi_J(j, k)\}_{k=1, \dots, 2^j-1}, \psi_J(j', k')\}_{0 \leq j \leq j' < J, k=0, \dots, 2^j-1, k'=0, \dots, 2^{j'}-1}$  の直交性  $V_j^J \perp W_{j'}^J (j \leq j')$ .

$$\langle \phi_J(j, k) | \psi_J(j', k') \rangle = 0, \quad (j \leq j', 0 \leq k < 2^j - 1, 0 \leq k' < 2^{j'} - 1).$$

証明 離散 Haar ベクトルの定義からわかる。 ■

注意 5.4 注意 5.2 でも指摘したように、離散 Haar ベクトル系を導入しても、Haar 関数系について成立する直交性や Haar 分解などの性質はそのまま引き継がれる。 $2^J$  個の標本化した関数値の組  $\{c_k^J\}_{k=0, \dots, 2^J-1}$  を与えたときにウェーブレット変換によって得られた係数の組  $\{\{d_{k_{J-1}}^{J-1}\}, \dots, \{d_{k_j}^j\}, \{c_{k_j}^j\}\}, (0 \leq j \leq J - 1)$  から得られる  $[0, 1)$  上の関数

$$\sum_{j'=j}^{J-1} \sum_{k_{j'}=0}^{2^{j'}-1} d_{k_{j'}}^{j'} \psi(2^{j'} x - k_{j'}) + \sum_{k=0}^{2^j-1} c_k^j \phi(2^j x - k)$$

は、 $2^{J+1}$  個の要素を持つベクトル和

$$\sum_{j'=j}^{J-1} \sum_{k_{j'}=0}^{2^{j'}-1} d_{k_{j'}}^{j'} \psi_J(j', k_{j'}) + \sum_{k=0}^{2^j-1} c_k^j \phi_J(j, k)$$

というように、Haar 関数系を使う  $[0, 1)$  上の関係式は、 $\phi(2^j x - k)$  を  $\phi_J(j, k)$  に、 $\psi(2^j x - k)$  を  $\psi_J(j, k)$  にと離散化関数 (ベクトル) 置き換えてもそのまま成立する。

注意 5.5 したがって、 $2^J$  個の標本化して得られた係数の組  $\{c_k^J\}_{k=0, \dots, 2^J-1}$  に関するウェーブレット変換 (あるいは逆変換) 係数の組  $\{\{d_{k_{J-1}}^{J-1}\}, \dots, \{d_{k_j}^j\}, \{c_{k_j}^j\}\}$ ,  $(0 \leq j \leq J-1)$  の計算は Haar 関数系の場合と何ら変わることはない。

Mathematica プログラムを考えよう。最大スケール  $J = \text{scale}$  における離散 Haar 関数  $\phi_{\text{scale}}(j, k) = \text{dHaarScale}[j, k, \text{scale}]$  および  $\psi_{\text{scale}}(j, k) = \text{dHaarWavelet}[j, k, \text{scale}]$  はたとえば次のように定義できる。

```
dHaarScale[j_Integer, k_Integer, scale_Integer] := Module[{},
  hs[j] := Module[{bhalf, ehalf, i},
    bhalf = Table[1, {i, 1, 2^(scale + 1 - j)}];
    ehalf = Table[0, {i, 2^(scale + 1 - j) + 1, 2^(scale + 1)}];
    Flatten[Append[bhalf, ehalf]]
  ];
  Nest[RotateRight, hs[j], 2^(scale + 1 - j)*k]
]

dHaarWavelet[j_Integer, k_Integer, scale_Integer] := Module[{},
  hw[j] := Module[{bquarter, equater, remain, i},
    bquarter = Table[1, {i, 1, 2^(scale - j)}];
    equater = Table[-1, {i, 2^(scale - j) + 1, 2^(scale + 1 - j)}];
    remain = Table[0, {i, 2^(scale + 1 - j) + 1, 2^(scale + 1)}];
    Flatten[{bquarter, equater, remain}]
  ];
  Nest[RotateRight, hw[j], 2^(scale + 1 - j)*k]
]
```

このとき、 $\phi_3(2, 2)$  および  $\psi_3(2, 2)$  は次のよう得られる。

```
dHaarScale[2, 2, 3]
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0}

dHaarWavelet[2, 2, 3]
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, -1, -1, 0, 0, 0, 0}
```

これを

```
ListPlot[dHaarScale[2, 2, 3], Filling -> Axis]
```

と単にプロットすると、リスト  $\text{dHaarWavelet}[2, 2, 3]$  は位置  $x = 1, 2, \dots, 16$  にプロットされる。Mathematica のリスト描画がリストの先頭が  $x = 1$  から描かれるためである。スケール  $J$  の  $2^{J+1}$  個の点を図 5.1 のように位置  $x = \frac{k}{2^{J+1}}, k = 0, \dots, 2^{J+1} - 1$  にプロットするには、つぎのように  $\text{ListPlot}$  内でプロット位置を調節する関数  $\text{plotRightPosition}[lst]$  を使えばよい。

```
plotRightPosition[lst_List] := Table[{(i - 1)/Length[lst], lst[[i]]}, {i, 1, Length[lst]}]
```

```
ListPlot[plotRightPosition[dHaarScale[2, 2, 3]], Filling -> Axis]
```

プロット位置が  $2^{-(J+1)}$  だけずれることは見かけ上のことであって本質的ではない。事実、最大スケール  $J$  が大きくなるとこのずれは視覚的にも問題がなくなるので、描画においてこうしたズレ修正は行なう必要性がなくなってしまう。

演習 5.6 図 5.1 のように、 $\phi_3(2, 2)$  および  $\psi_3(2, 2)$  などをプロットしなさい。

## 5.2 2次元 Haar Wavelet 基底

ここではいささか天降り的ではあるが、2つのベクトル空間  $V$  と  $W$  に対してテンソル積 (tensor product)

$$V \times W \rightarrow V \otimes W \quad (5.3)$$

を具体的な場合について書き下しておこう。 $V \otimes W$  は  $\forall v \in V$  および  $\forall w \in W$  から得られる  $v \otimes w$  が  $v \in V$  に関しても  $w \in W$  に関しても線形であるようなベクトル空間である。すなわち

$$\begin{aligned} (av_1 + bv_2) \otimes w &= a(v_1 \otimes w) + b(v_2 \otimes w), \\ v \otimes (cw_1 + dw_2) &= c(v \otimes w_1) + d(v \otimes w_2) \end{aligned}$$

であるような双線形則を満たす。

定義 5.7 (関数のテンソル積) 1変数関数からなる2つのベクトル空間  $V$  および  $W$  において、関数  $f \in V$  と  $g \in W$  のテンソル積を

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y) \quad (5.4)$$

で定義する。

注意 5.8 関数のテンソル積の持つ双線形性は  $((af_1 + bf_2) \otimes g)(x, y) = a(f_1 \otimes g)(x, y) + b(f_2 \otimes g)(x, y)$  であって、もちろん引数  $(x, y)$  に関するものではない:  $(f \otimes g)(ax_1 + bx_2, y) \neq af(x_1)g(y) + bf(x_2)g(y)$ .

定義 5.9 (ベクトルの Kronecker 積)  $m$ 次元ベクトル空間  $V$  および  $n$ 次元ベクトル空間  $W$  において、 $\mathbf{u} = [u_0, \dots, u_{m-1}] \in V$ ,  $\mathbf{v} = [v_0, \dots, v_{n-1}] \in W$  のテンソル積を次の Kronecker 積  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$  で定義する (この場合、行列要素の添字を0から始めることにすると都合がよい)。

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_0 v_0 & \dots & u_0 v_k & \dots & u_0 v_{n-1} \\ u_j v_0 & \dots & u_j v_k & \dots & u_j v_{n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{m-1} v_0 & \dots & u_{m-1} v_k & \dots & u_{m-1} v_{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

注意 5.10 式 (5.5) から明らかなように、このとき  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$  は  $m \times n$  行列全体からなるベクトル空間の要素である。



定義 5.11  $m$  行  $n$  列の行列全体をベクトル空間  $M$  とするとき、その要素  $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in M$  の内積を次で定義する（ここでは、行列要素の添字は 0 から始まることにする）

$$\langle A | B \rangle_{\text{行列}} = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_{i,j}^* b_{i,j} \quad (5.6)$$

つまり、行列の内積  $\langle A | B \rangle$  は対応する行列要素を掛けた総和である。

命題 5.12 ベクトル  $a, b, c, d$  について、行列  $a \otimes b$  と  $c \otimes d$  の内積は

$$\begin{aligned} \langle a \otimes b | c \otimes d \rangle_{\text{行列}} &= \sum_i \sum_j (a \otimes b)_{ij} (c \otimes d)_{ij} = \sum_i \sum_j (a_i b_j) (c_i d_j) \\ &= \left( \sum_i a_i c_i \right) \left( \sum_j b_j d_j \right) = \langle a | c \rangle \langle b | d \rangle \end{aligned}$$

証明 行列内積の定義から明らか。 ■

例 5.13 式 (5.1) で定義したスケール  $J$  の離散 Haar ベクトル系  $\phi_J(J, k)$  および  $\psi_J(J, k)$  の Kronecker 積を計算してみよう ( $0 \leq k \leq 2^J - 1$ )。  $\phi_J(J, k), \psi_J(J, k)$  はスケール  $J$  のもとで最大解像度  $2^{-J}$  を持つ最も‘細かい’Haar ベクトルであることに注意する（図 5.1 参照）

$J = 0$  のとき

$$\begin{aligned} \phi_0(0, 0) \otimes \phi_0(0, 0) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, & \phi_0(0, 0) \otimes \psi_0(0, 0) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \\ \psi_0(0, 0) \otimes \phi_0(0, 0) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, & \psi_0(0, 0) \otimes \psi_0(0, 0) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

こうして得られた  $2 \times 2$  行列 `mat` を Mathematica において

```
ListPlot3D[mat, Mesh -> None, InterpolationOrder -> 1, ColorFunction -> "SouthwestColors"]
```

として表示した結果が図 5.2 の右側 ((a'), (b'), (c'), (d')) である。区分的に連続な Haar 関数系のテンソル積の結果と離散 Haar ベクトルのテンソル積 (Kronecker 積) は本質的に同等であることが確認できる (この事実は既に注意 5.2 で指摘している)

演習 5.14 Haar スケーリング関数系  $\phi(x), \psi(x)$  および  $J = 0$  のときの離散 Haar ベクトル  $\phi_0(0, 0), \psi_0(0, 0)$  のテンソル積のグラフが図 5.2 のようになることを確かめなさい。

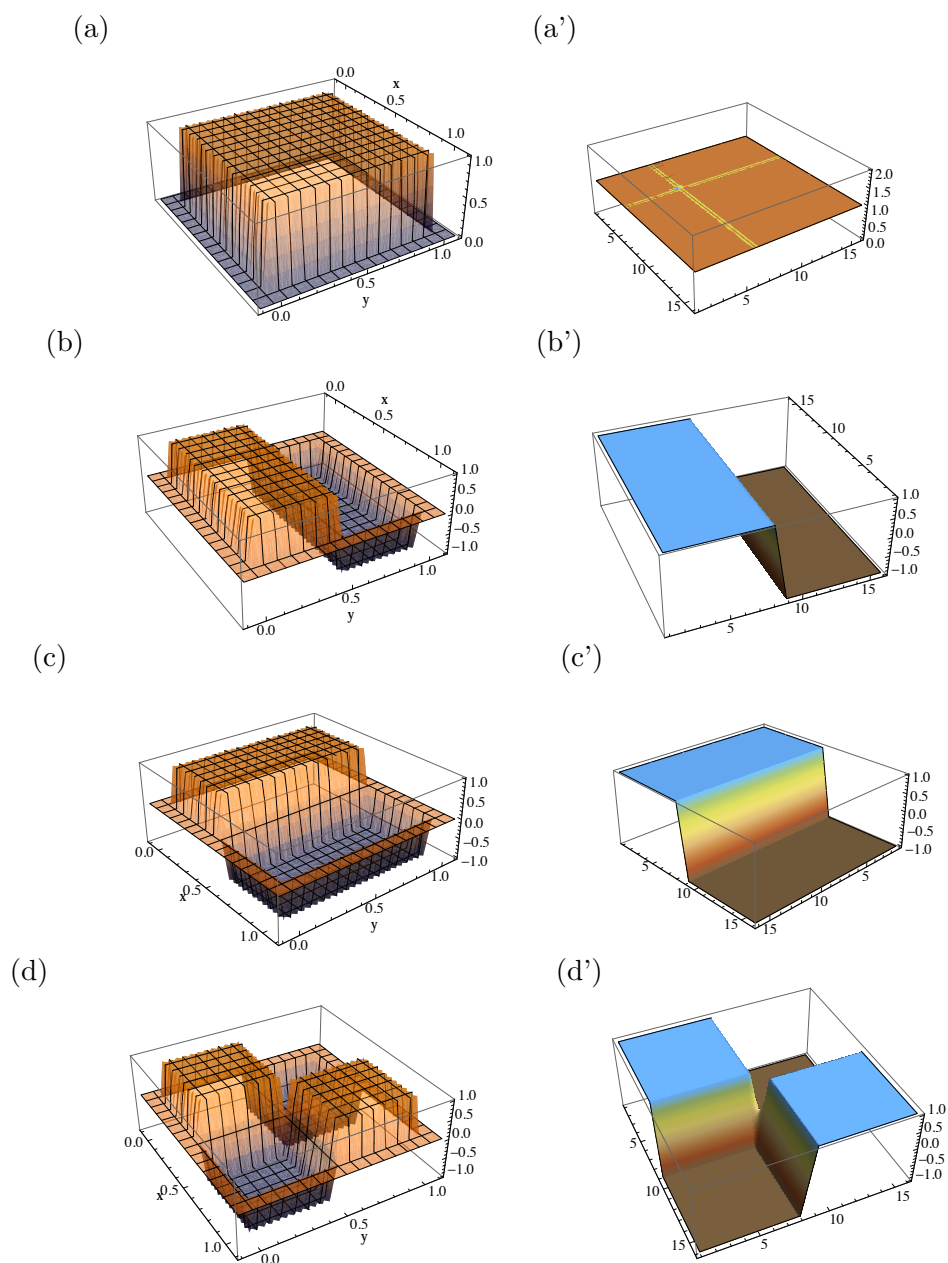


図 5.2 2次元 Haar 関数系と 2次元 Haar 離散系 (a)  $\phi \otimes \phi(x, y)$  (a')  $\phi_0(0, 0) \otimes \phi_1(0, 0)$ , (b)  $\phi \otimes \psi(x, y)$  (b')  $\phi_0(0, 0) \otimes \psi_1(0, 0)$ , (c)  $\phi \otimes \psi(x, y)$  (c')  $\psi_0(0, 0) \otimes \phi_1(0, 0)$ , (d)  $\psi \otimes \psi(x, y)$  (d')  $\psi_0(0, 0) \otimes \psi_1(0, 0)$ . 注意 5.2 で指摘するように、区分的連続な Haar 系と離散 Haar 系とは本質的に同等であることがわかる。

$J = 1$  のとき ( $k, \ell = 0, 1$ ) には、 $\phi_1(1, k) \otimes \phi_1(1, \ell)$  は次のようになる :

$$\begin{aligned} \phi_1(1, 0) \otimes \phi_1(1, 0) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \phi_1(1, 0) \otimes \phi_1(1, 1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \phi_1(1, 1) \otimes \phi_1(1, 0) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \phi_1(1, 1) \otimes \phi_1(1, 1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\phi_1(1, k) \otimes \psi_1(1, \ell)$  は次のようになる :

$$\begin{aligned} \phi_1(1, 0) \otimes \psi_1(1, 0) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \phi_1(1, 0) \otimes \psi_1(1, 1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \phi_1(1, 1) \otimes \psi_1(1, 0) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \phi_1(1, 1) \otimes \psi_1(1, 1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\psi_1(1, k) \otimes \phi_1(1, \ell)$  は次のようになる :

$$\begin{aligned} \psi_1(1, 0) \otimes \phi_1(1, 0) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \psi_1(1, 0) \otimes \phi_1(1, 1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \psi_1(1, 1) \otimes \phi_1(1, 0) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \psi_1(1, 1) \otimes \phi_1(1, 1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\psi_1(1, k) \otimes \psi_1(1, \ell)$  は次のようになる :

$$\begin{aligned} \psi_1(1, 0) \otimes \psi_1(1, 0) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \psi_1(1, 0) \otimes \psi_1(1, 1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \psi_1(1, 1) \otimes \psi_1(1, 0) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \psi_1(1, 1) \otimes \psi_1(1, 1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

さて、一般のスケール  $J$  の長さ  $2^{J+1}$  の離散 Haar ベクトル  $\phi_J(J, k)$  と  $\psi_J(J, \ell)$  とのテンソル積を考えてみよう。たとえば

$$\begin{aligned} \Phi_{k,\ell}^J &\equiv \phi_J(J, k) \otimes \phi_J(J, \ell) \\ &= \underbrace{(0 \dots 0 \ 1 \ 1)}_{2k} \underbrace{(0 \dots \dots 0)}_{2^{J+1}-2(k+1)} \otimes \underbrace{(0 \dots 0 \ 1 \ 1)}_{2\ell} \underbrace{(0 \dots \dots 0)}_{2^{J+1}-2(\ell+1)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

は  $2^{J+1} \times 2^{J+1}$  正方行列で ( $0 \leq k, \ell \leq 2^J - 1$ ) で、ベクトルのテンソル積の定義 5.1 から、この  $2^{2(J+1)}$  個の行列要素は次のようになっている (行列要素の添字を 0 から始める)。

$$\left(\Phi_{k,\ell}^J\right)_{m,n} = \begin{cases} 1, & 2k \leq m \leq 2k+1, 2\ell \leq n \leq 2\ell+1, \\ 0, & \text{それ以外.} \end{cases} \quad (5.8)$$

つまり、行列  $\phi_J(J, k) \otimes \phi_J(J, \ell)$  の非零部分は  $2 \times 2$  の正方行列ブロックである。同様にして

$$\Psi_{k,\ell}^{J,d} \equiv \phi_J(J, k) \otimes \psi_J(J, \ell), \quad (5.9)$$

$$\Psi_{k,\ell}^{J,v} \equiv \psi_J(J, k) \otimes \phi_J(J, \ell), \quad (5.10)$$

$$\Psi_{k,\ell}^{J,h} \equiv \psi_J(J, k) \otimes \psi_J(J, \ell) \quad (5.11)$$

においても非零成分の様子はどれも同じ添字領域 ( $2k \leq m \leq 2k+1, 2\ell \leq n \leq 2\ell+1, 0 \leq k, \ell \leq 2^J - 1$ ) で唯一つの  $2 \times 2$  正方行列ブロックをなし、それ以外の要素は全て 0 であることがわかる。すなわち、 $(2k, 2\ell)$ -行列要素を左端上とする非零正方行列ブロックは次のようである。

$$\left(\Phi_{k,\ell}^J\right)_{\text{非零ブロック}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$\left(\Psi_{k,\ell}^{J,h}\right)_{\text{非零ブロック}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\left(\Psi_{k,\ell}^{J,v}\right)_{\text{非零ブロック}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$\left(\Psi_{k,\ell}^{J,d}\right)_{\text{非零ブロック}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

### 演習 5.15

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{k,\ell}^J | \Phi_{k,\ell}^J \rangle_{\text{行列}} &\equiv \|\Phi_{k,\ell}^J\| = \|\Psi_{k,\ell}^{J,h}\| = \|\Psi_{k,\ell}^{J,v}\| = \|\Psi_{k,\ell}^{J,d}\| \\ &= 2^2 = 4 \end{aligned} \quad (5.16)$$

であることを示しなさい。

(ヒント) 離散 Haar ベクトルの定義式 (5.1) より、

$$\|\phi_J(j, k)\| = \|\psi_J(j, \ell)\| = 2^{J+1-j}$$

に注意する。

## 5.3 2次元 Haar wavelet 変換

大きさ  $2^{J+2}$  の正方行列  $M = (m_{i,j})$  を  $2^{J+2} \times 2^{J+2} = 2^{2(J+2)}$  次元ベクトル空間とみなしたとき、正規直交する自然な基底行列を  $(E(i, j))_{k,\ell} = \begin{cases} 1, & k = i, \ell = j \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$  としたとき、

$$M = \sum_{i,j=1}^{2^{2(J+2)}} m_{i,j} E(i, j)$$

と展開できる。以下で、自然基底以外の直交基底を離散 Haar ベクトル系から構成し、その基底行列で正方行列を展開することを考えてみよう。

**定理 5.16** 離散 Haar ベクトル系のテンソル積から得られる大きさ  $2^{J+1}$  ( $J \geq 0$ ) の正方行列系の組

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_{k,\ell}^J &= \phi_J(J,k) \otimes \phi_J(J,\ell), \Psi_{k,\ell}^{J,h} = \phi_J(J,k) \otimes \psi_J(J,\ell), \\ \Psi_{k,\ell}^{J,v} &= \psi_J(J,k) \otimes \phi_J(J,\ell), \Psi_{k,\ell}^{J,d} = \psi_J(J,k) \otimes \psi_J(J,\ell) \end{aligned} \right\}_{0 \leq k, \ell \leq 2^J - 1}$$

は大きさ  $2^{J+1}$  の正方行列からなる  $2^{2(J+1)}$  次元ベクトル空間の直交基底をなす。

**証明** 大きさ  $2^{J+1}$  の正方行列は  $2^{2(J+1)}$  個の要素を持ち、 $2^{2(J+1)}$  次元ベクトル空間の要素と見なすことができる。各行列系は  $2^{2J}$  個の行列からなり、これが 4 組あることからベクトル空間の次元数だけある。命題 5.12 および定理 5.3 から、 $\{\phi_J(j,k)\}$  および  $\{\psi_J(j,k)\}$  の直交性から

$$\begin{aligned} \left\langle \Phi_{k,\ell}^J \mid \Psi_{k',\ell'}^{J,h} \right\rangle_{\text{行列}} &= \langle \phi_J(J,k) \otimes \phi_J(J,\ell) \mid \phi_J(J,k') \otimes \psi_J(J,\ell') \rangle \\ &= \langle \phi_J(J,k) \mid \phi_J(J,k') \rangle \cdot \langle \phi_J(J,\ell) \mid \psi_J(J,\ell') \rangle \\ &= 2^2 \delta_{kk'} \delta_{\ell\ell'}. \end{aligned}$$

他の組み合わせについても同様であり、これらの行列系は互いに直交して線形独立である。正規直交基底行列は、自身との内積が 4 である (演習 5.16) ことから、各行列系で  $\frac{1}{2}$  倍したものである。 ■

**系 5.17** 大きさ  $2^{J+1}$  ( $J \geq 0$ ) の任意の正方行列  $A$  は次のように展開される。

$$A = \sum_{k,\ell=0}^{2^J-1} \frac{1}{4} \left( \left\langle \Phi_{k,\ell}^J \mid A \right\rangle_{\text{行列}} \Phi_{k,\ell}^J + \left\langle \Psi_{k,\ell}^{J,h} \mid A \right\rangle_{\text{行列}} \Phi_{k,\ell}^{J,h} + \left\langle \Psi_{k,\ell}^{J,v} \mid A \right\rangle_{\text{行列}} \Phi_{k,\ell}^{J,v} + \left\langle \Psi_{k,\ell}^{J,d} \mid A \right\rangle_{\text{行列}} \Phi_{k,\ell}^{J,d} \right) \quad (5.17)$$

**証明** 直交基底についての一般論より、正規直交行列系  $\frac{1}{2}\Phi_{k,\ell}^J$ ,  $\frac{1}{2}\Psi_{k,\ell}^{J,h}$ ,  $\frac{1}{2}\Psi_{k,\ell}^{J,v}$  および  $\frac{1}{2}\Psi_{k,\ell}^{J,d}$  との内積を使って展開できる。 ■

系 5.17 のようにして大きさ  $2^{J+1}$  の任意の正方行列  $A = (a_{i,j})$  を展開したとき、行列  $\Phi_{k,\ell}^J$ ,  $\Psi_{k,\ell}^{J,h}$ ,  $\Psi_{k,\ell}^{J,v}$  および  $\Psi_{k,\ell}^{J,d}$  ( $0 \leq k, \ell \leq 2^J - 1$ ) の係数は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4} \left\langle \Phi_{k,\ell}^J \mid A \right\rangle_{\text{行列}} &= \frac{1}{4} (a_{2k,2\ell} + a_{2k,2\ell+1} + a_{2k+1,2\ell} + a_{2k+1,2\ell+1}) \\ \frac{1}{4} \left\langle \Psi_{k,\ell}^{J,h} \mid A \right\rangle_{\text{行列}} &= \frac{1}{4} (a_{2k,2\ell} - a_{2k,2\ell+1} + a_{2k+1,2\ell} - a_{2k+1,2\ell+1}) \\ \frac{1}{4} \left\langle \Psi_{k,\ell}^{J,v} \mid A \right\rangle_{\text{行列}} &= \frac{1}{4} (a_{2k,2\ell} + a_{2k,2\ell+1} - a_{2k+1,2\ell} - a_{2k+1,2\ell+1}) \\ \frac{1}{4} \left\langle \Psi_{k,\ell}^{J,d} \mid A \right\rangle_{\text{行列}} &= \frac{1}{4} (a_{2k,2\ell} - a_{2k,2\ell+1} - a_{2k+1,2\ell} + a_{2k+1,2\ell+1}) \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

これら総計  $4 \times 2^{2J} = 2^{2(J+1)}$  個の係数から定まる大きさ  $2^{J+1}$  の正方行列を Haar wavelet 変換行列として次のように定める。

定義 5.18 (1 段階 Haar wavelet 変換) 大きさ  $2^{J+1}$  の任意の正方行列  $A$  に対して、行列  $A_{Haar}$  を次で定義する。

$$\begin{aligned} (A_{Haar})_{k,\ell} &= \frac{1}{4} \langle \Phi_{k,\ell}^J \mid A \rangle_{\text{行列}}, & (A_{Haar})_{k,2^J+\ell} &= \frac{1}{4} \langle \Psi_{k,\ell}^{J,h} \mid A \rangle_{\text{行列}} \\ (A_{Haar})_{2^J+k,\ell} &= \frac{1}{4} \langle \Psi_{k,\ell}^{J,v} \mid A \rangle_{\text{行列}}, & (A_{Haar})_{2^J+k,2^J+\ell} &= \frac{1}{4} \langle \Psi_{k,\ell}^{J,d} \mid A \rangle_{\text{行列}}. \end{aligned}$$

ここで、 $0 \leq k, \ell \leq 2^J - 1$  である。 $A_{Haar}$  を  $A$  の 1 段階 Haar wavelet 変換行列または単に 1 段階 Haar wavelet 変換といい

$$\mathcal{H}: A \mapsto A_{Haar} \tag{5.19}$$

と記す。

例 5.19  $J = 0$  として  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  のとき、式 (5.18) から

$$A_{Haar} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(a+b+c+d) & \frac{1}{4}(a-b+c-d) \\ \frac{1}{4}(a+b-c-d) & \frac{1}{4}(a-b-c+d) \end{bmatrix}_{\text{Haar}}.$$

この結果は次のように、行列  $A$  の各行について 1 段階 wavelet 変換した結果を平均化係数を右詰め (103 ページ) して、さらに続けて列についても 1 段階 wavelet 変換した結果を平均化係数を右詰めした結果得られる  $2 \times 2$  行列になっていることに注意する。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(a+b) & \frac{1}{2}(a-b) \\ \frac{1}{2}(c+d) & \frac{1}{4}(c-d) \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{行の 1 段階 wavelet 変換} \\ \text{右詰め}}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(c+d)) & \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(a-b) + \frac{1}{2}(c-d)) \\ \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(c+d)) & \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(a-b) - \frac{1}{2}(c-d)) \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{列の 1 段階 wavelet 変換} \\ \text{右詰め}}}$$

例 5.20  $J = 1$  のときを考えてみよう。

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \\ 8 & 2 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{のとき} \quad A_{Haar} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\text{Haar}}.$$

この結果も、行列  $A$  の各行について 1 段階 wavelet 変換した結果を平均化係数を右詰めし、さらに続けて列についても 1 段階 wavelet 変換した結果を平均化係数を右詰めした結果得られる  $4 \times 4$  行列になっ

ている。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(9+7) & \frac{1}{2}(6+2) & \frac{1}{2}(9-7) & \frac{1}{2}(6-2) \\ \frac{1}{2}(5+3) & \frac{1}{2}(4+4) & \frac{1}{2}(5-3) & \frac{1}{2}(4-4) \\ \frac{1}{2}(8+2) & \frac{1}{2}(4+0) & \frac{1}{2}(8-2) & \frac{1}{2}(4-0) \\ \frac{1}{2}(6+0) & \frac{1}{2}(2+2) & \frac{1}{2}(6-0) & \frac{1}{2}(2-2) \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行の 1 段階 wavelet 変換 右詰め}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}((9+7)+(5+3)) & \frac{1}{4}((6+2)+(4+4)) & \frac{1}{4}((9-7)+(5-3)) & \frac{1}{4}((6-2)+(4-4)) \\ \frac{1}{4}((8+2)+(6+0)) & \frac{1}{4}((4+0)+(2+2)) & \frac{1}{4}((8-2)+(6-0)) & \frac{1}{4}((4-0)+(2-2)) \\ \frac{1}{4}((9+7)-(5+3)) & \frac{1}{4}((6+2)-(4+4)) & \frac{1}{4}((9-7)-(5-3)) & \frac{1}{4}((6-2)-(4-4)) \\ \frac{1}{4}((8+2)-(6+0)) & \frac{1}{4}((4+0)-(2+2)) & \frac{1}{4}((8-2)-(6-0)) & \frac{1}{4}((4-0)-(2-2)) \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行の 1 段階 wavelet 変換 右詰め}}$$

さらに、 $A_{Haar}$  の左上隅の  $2 \times 2$  行列  $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  についても Haar wavelet 変換を施して  $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  を得る。左上隅  $2 \times 2$  ブロックをこの結果で置き換えて得られる行列は、平均化係数を右詰して 1 段階 wavelet 変換を 2 回繰り返して得られたもので、次のようになる。

$$A \xrightarrow{\mathcal{H}} \mathcal{H}A = A_{Haar} \xrightarrow{\mathcal{H}} \mathcal{H}^2 A = A_{Haar^2} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{Haar^2}$$

最左隅上の要素 4 は、 $4 \times 4$  行列の 16 個全要素の平均値であることに注意する。

**定理 5.21** 大きさ  $2^{j+1}$  の正方行列  $\mathbf{P}^j$  の 1 段階 Haar wavelet 変換  $\mathcal{H}\mathbf{P}^j$  は、次で定まる大きさ  $2^j$  の 4 つの正方行列 ( $0 \leq k, \ell \leq 2^j - 1$ )

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}^{j-1})_{k,\ell} &= \frac{1}{4} \langle \Phi_{k,\ell}^J \mid \mathbf{P}^j \rangle_{\text{行列}}, & (\mathbf{Q}^{j-1,h})_{k,\ell} &= \frac{1}{4} \langle \Psi_{k,\ell}^{J,h} \mid \mathbf{P}^j \rangle_{\text{行列}}, \\ (\mathbf{Q}^{j-1,v})_{k,\ell} &= \frac{1}{4} \langle \Psi_{k,\ell}^{J,v} \mid \mathbf{P}^j \rangle_{\text{行列}}, & (\mathbf{Q}^{j-1,d})_{k,\ell} &= \frac{1}{4} \langle \Psi_{k,\ell}^{J,d} \mid \mathbf{P}^j \rangle_{\text{行列}} \end{aligned}$$

を使って、次のように表される。

$$\mathbf{P}^j \xrightarrow{\mathcal{H}} \mathcal{H}\mathbf{P}^j = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{P}^{j-1} & \mathbf{Q}^{j-1,h} \\ \hline \mathbf{Q}^{j-1,v} & \mathbf{Q}^{j-1,d} \end{array} \right]_{Haar}.$$

したがって、大きさ  $2^{J+1}$  の正方行列  $\mathbf{P}^J$  の Haar wavelet 変換は、合計  $J+1$  回の 1 段階 Haar wavelet 変換  $\mathcal{H}\mathbf{P}^j = \mathbf{P}^{j-1}$  が逐次的に定める系列  $\{\mathbf{P}^J, \dots, \mathbf{P}^1\}$  によって与えられる。

## 参考文献

- [1] I. ドブシー 『ウェーブレット 10 講』、丸善出版 (2012).
- [2] 新井 仁之 『ウェーブレット』 (共立叢書 現代数学の潮流)、共立出版 (2010).
- [3] イヴェス・ニイベルゲルト 『ウェーブレット変換の基礎』、森北出版 (2004).
- [4] G.G. ウォルター 『ウェーブレットと直交関数系』 (数理科学セミナー)、東京電機大学出版局 (2001)
- [5] 猪狩惺 『フーリエ級数』、岩波全書 (1975).
- [6] クーラン=ヒルベルト 『物理数学の方法』、丸善出版 (2013)、東京図書 (1985)
- [7] 齊藤正彦, 『線形代数入門』, 東大出版会 (1966). 佐武一郎, 『線形代数』, 裳華房 (1974).
- [8] A. Boggess and F. J. Narcowich, *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis* (2nd ed), Wiley (2009).
- [9] David F. Walnut, *An Introduction to Wavelet Analysis*, Birkhaeuser (2001).
- [10] Michael W. Frazier, *An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra*, Springer (1999).
- [11] James S. Walker, *A Primer on Wavelets and Their Scientific Applications* (2nd ed), Chapman and Hall (2008).
- [12] Amir-Homayoon Najmi, *Wavelets, A Concise Guide*, John Hopkikins Univ. Press (2012).