

ネットワークの構造

ネットワーク形成の理論にむけて

通信するコンピュータ同士はどのようなネットワークを形成しているのか？

リンクし合っているWebページはどんなネットワークを形成しているのか？

その測定・観察はたいへん難しかった

ネットワークの実際を知ることは極めて困難

例

友人関係や異性関係を教えてもらえますか

6次の隔たり：Stanley Milgramの1967年のネブラスカ州からボストンへの見知らぬ人への手紙の実験

伝染病の感染拡大と疫学的対策

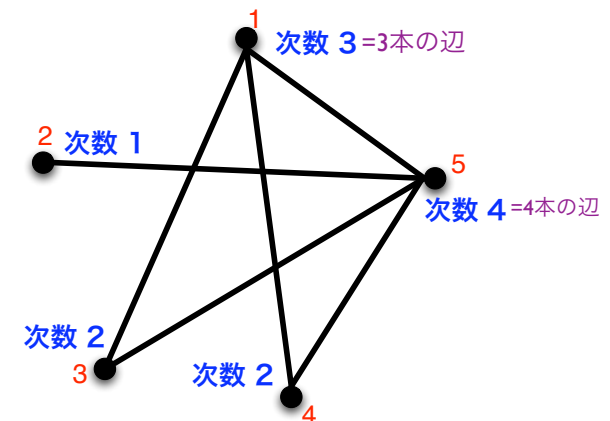
endemic：地域内で流行し、他の地域に広がってはいかない通常の流行

epidemic (outbreak)：伝染病が予想を超えて急激に広がる状態

pandemic：多国間にまたがって広範囲に感染した爆発状態

ネットワーク頂点の次数

頂点 v にリンクしている辺の数



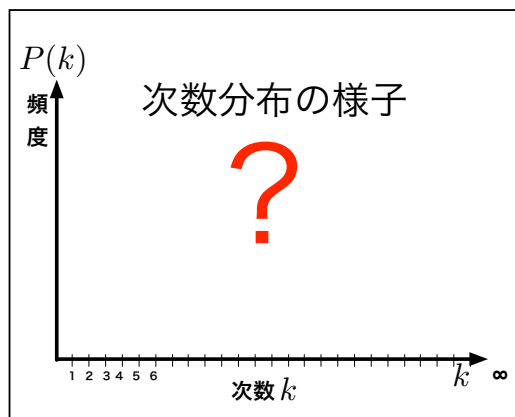
ネットワークの次数分布

1. 全頂点 v_1, v_2, \dots, v_N の次数 d_1, d_2, \dots, d_N を調べ上げる

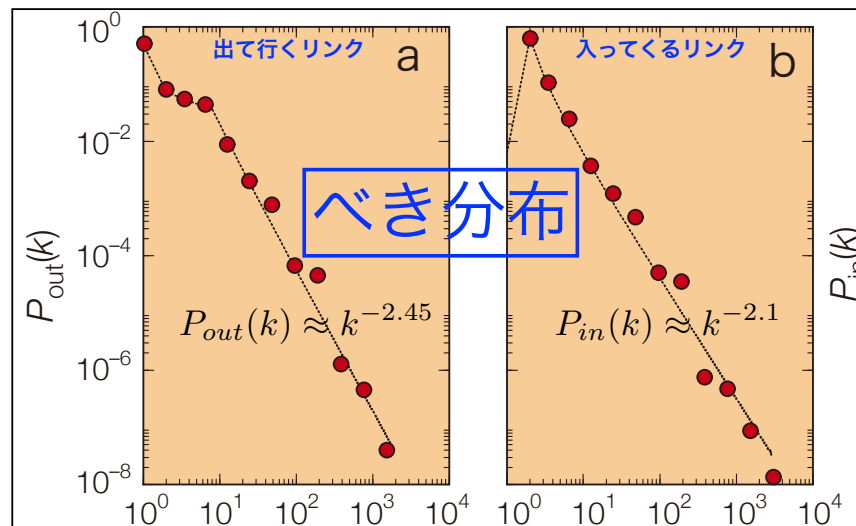
2. 次数 k を持つ頂点の数 n_k を数える ($k = 1, 2, \dots$)

3. 次数 k を持つ頂点がネットワーク内に登場する頻度 $P(k) = \frac{n_k}{N}$

4. 得られる頻度分布が次数分布



Webページの次数分布



A-L. Barabási, Nature 401(1999)

masahiro Mizutani

べき分布

頂点の次数が k である確率 $P(k)$

$$P(k) = ck^{-\gamma}$$

γ : べき指数

C : 規格化定数

条件 $\sum_{k=1}^{\infty} P(k) = 1$ から定まる

$$c = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\gamma}}$$

$$= \frac{1}{\zeta(\gamma)}$$

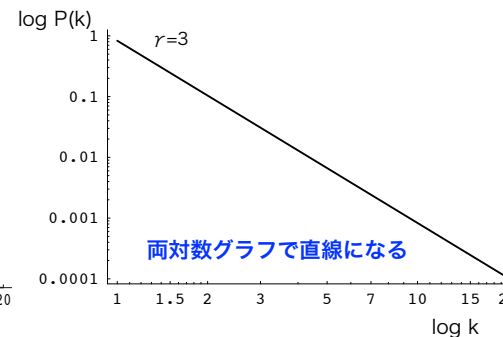
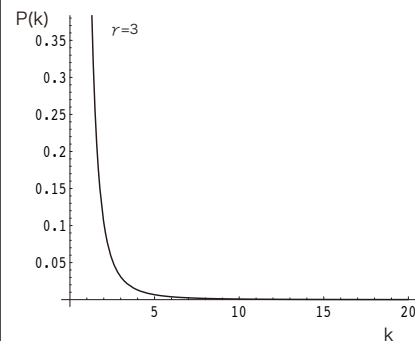
$\zeta(\gamma)$: Riemannのゼータ関数

Masahiro Mizutani

べき分布のグラフ

$$P(k) = ck^{-\gamma}$$

$$\log P(k) = -\gamma \log k + \log c$$



Masahiro Mizutani

ベキ分布

離散分布

$$P(k) = ck^{-\gamma} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

連続分布(パレート分布)

$$P(x) = cx^{-\gamma}, (x \geq x_0)$$

Masahiro Mizutani

ベキ法則

2つの量 y と x との関係が

$$y \sim x^\delta \quad \delta : \text{ベキ指数}$$

例：万有引力の法則

2物体の間に働く力 f は、2物体間の距離 r の
2乗に反比例する。

$$f \sim \frac{1}{r^2}$$

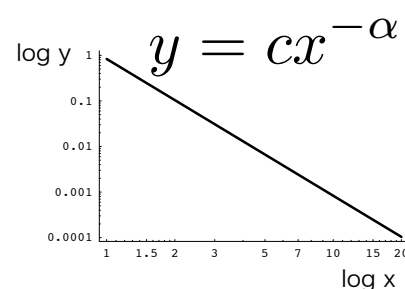
Masahiro Mizutani

ベキ分布の特徴

- 特徴的尺度 (scale) を持たない (free)
- 同じベキ指数のベキ分布はスケール変換に対して不変
- 平均から離れた値を持つ確率が消えない
- 大きな次数を持つ頂点が少なからず存在
ハブ(hub)

Masahiro Mizutani

ベキ法則のスケール変換不変性

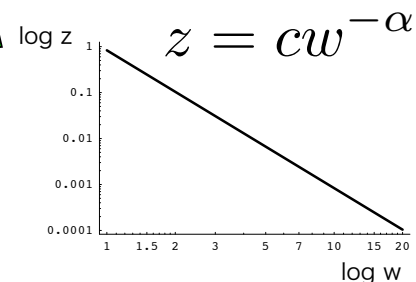


スケール変換

$$y \Rightarrow z = sy$$

$$x \Rightarrow w = tx$$

ただし $\log s = \alpha \log t$

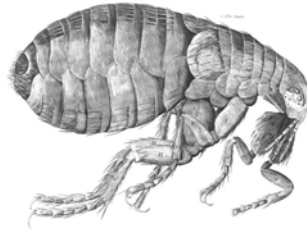


ベキ法則はスケール変換しても
同じ法則として保たれる
(スケール変換から自由)

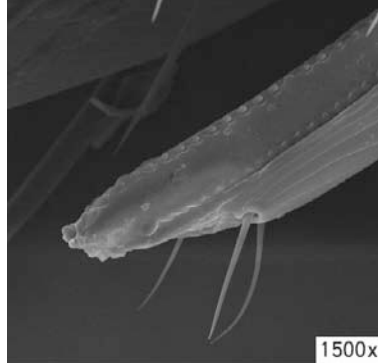
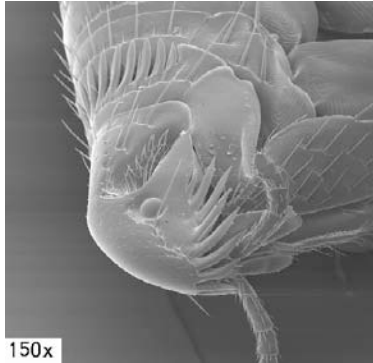
スケール・フリー

Masahiro Mizutani

ノミ(蚤)を観る



ノミと分かるには
対象に**特徴的尺度**がある



尺度(倍率)を上げていくと、ノミだと分からなくなる

Masahiro Mizutani

自己相似性

どんな部分も、適当に拡大すると、
元の図形とほぼ同じ形(自分に相似的)

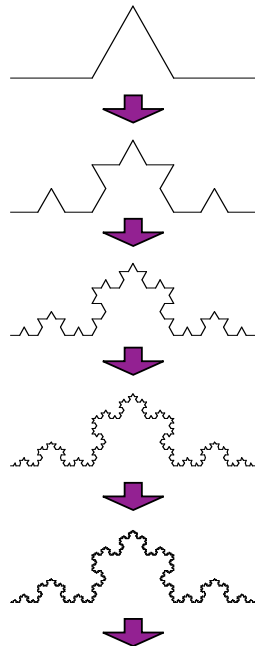


フラクタル(Fractal)

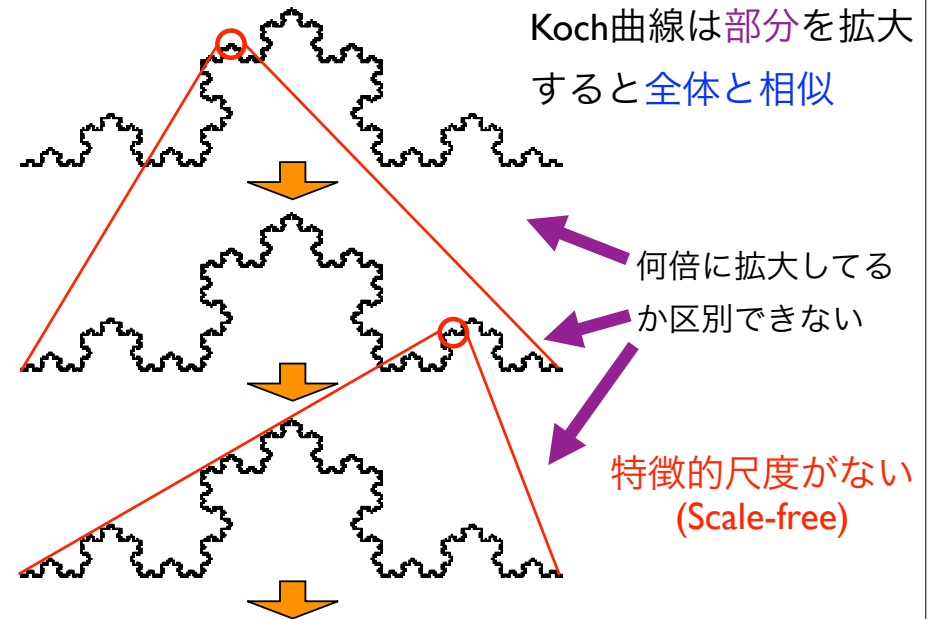
Masahiro Mizutani

フラクタル図形の例

Koch曲線



Masahiro Mizutani



Masahiro Mizutani

フラクタル次元

次元概念の一般化

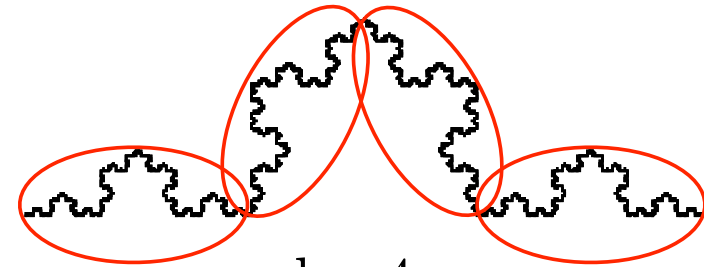
ある図形の全体が、 $1/a$ に縮小したミニチュア a^d 個によって構成されているとき

その図形の次元 = d

Masahiro Mizutani

Koch曲線の次元

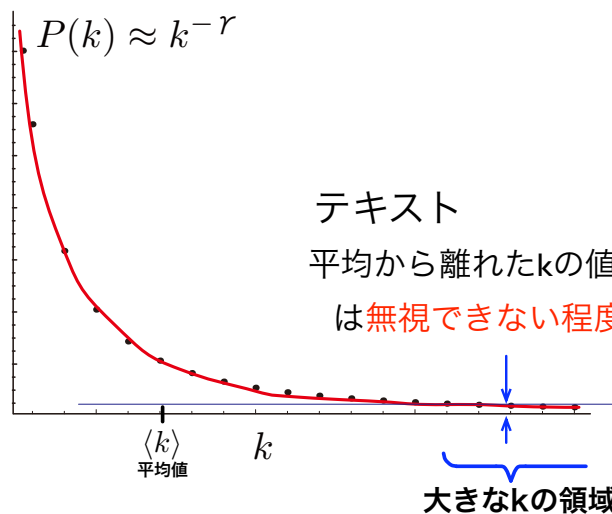
$3^d = 4$ 全体を1/3倍したパーツを4つ貼り合わせて全体になる



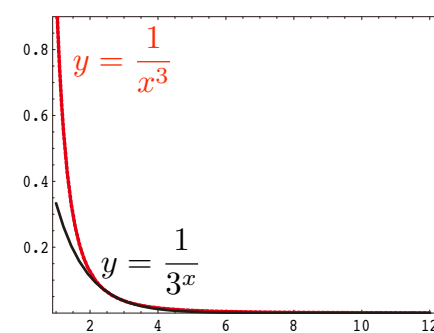
$$d = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2619..$$

Masahiro Mizutani

平均から離れた値の確率



Masahiro Mizutani

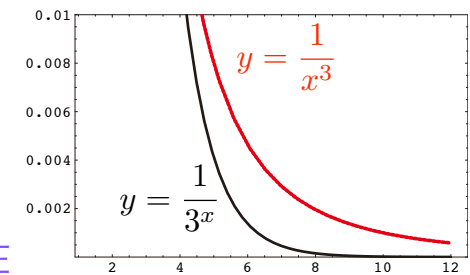


べき関数 $y = x^{-\gamma}$ と
指数関数 $y = a^{-x}$
の減少比較

指数関数の急激な減少に比べて
べき関数の減少は穏やか



希有現象(大きなk)の存在



Masahiro Mizutani

Scale-Freeネットワーク

- 頂点次数の頻度が**ベキ分布**を持つネットワーク
- **Small World性とは別概念**
 - 大抵のScale-FreeネットワークはSmall World性を併せ持つ
 - Small World性は満たすが、非Scale-Freeなネットワークもある

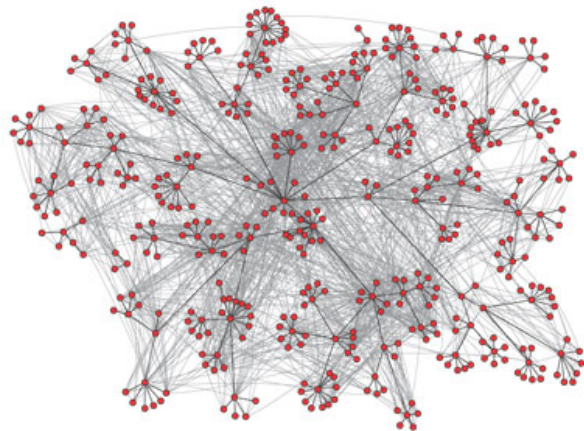
Masahiro Mizutani

スケールフリーネットワークの特徴 ハブの存在

ネットワークにおいて、非常に多くの辺が集まっている頂点



masahiro Mizutani



Social networks based on communication and interaction can also be constructed from the traces left by on-line data. In this case, the pattern of e-mail communication among 436 employees of Hewlett Packard Research Lab is superimposed on the official organizational hierarchy.

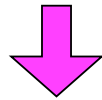
<http://www.cs.cornell.edu/home/kleinber/networks-book/>

ハブ存在の実証例

- Webページ
 - 多くのリンクが集まる有名サイト
- インターネットコンピュータ接続
 - 巨大プロバイダがバックボーンを提供
- 俳優の共演関係
 - 有名人は知り合いが多い
- 巨大空港
 - ハブ空港を経て、地方空港にたどり着く

Masahiro Mizutani

ベキ分布の検討



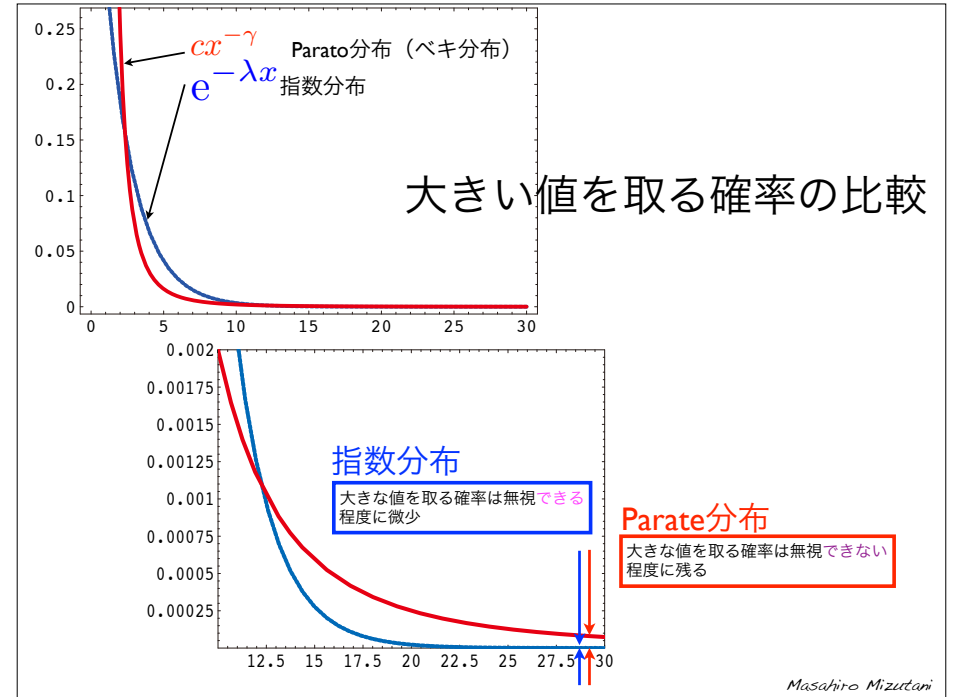
「不公平な」分布である

以下、計算しやすさのために、連続なベキ分布である

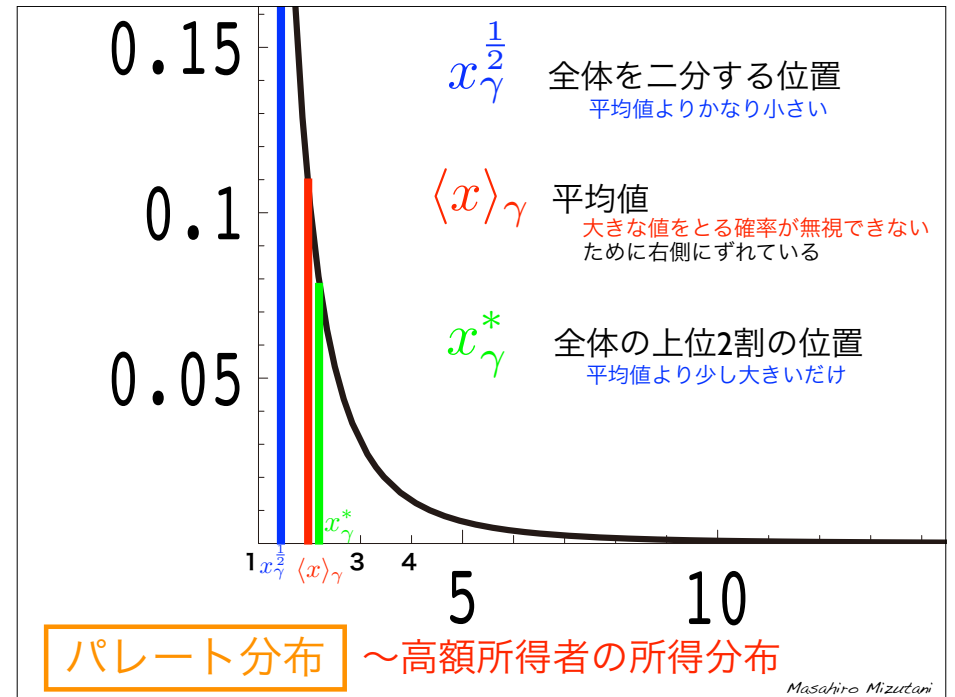
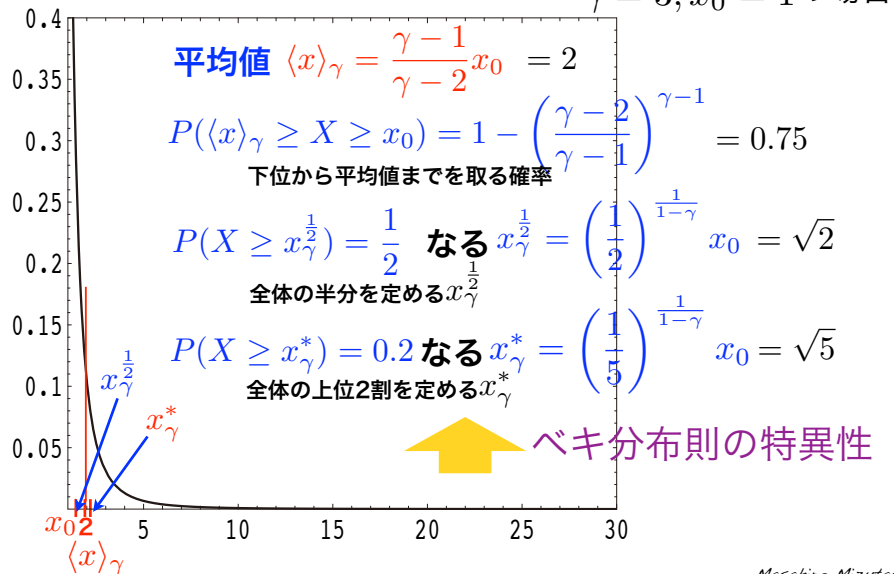
パレート分布 $P(x) = cx^{-\gamma}, (x \geq x_0)$

で検討してみる

Masahiro Mizutani



パレート分布 $P(x) = cx^{-\gamma}, (x \geq x_0)$
 $\gamma = 3, x_0 = 1$ の場合



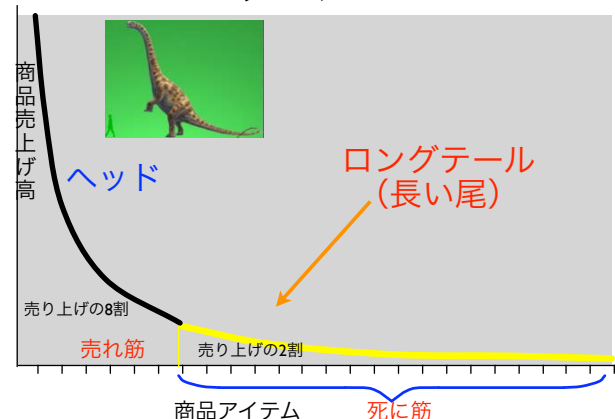
パレートの法則

(1848-1923)

- 経済学者のV. Paretoが見出した**経験法則**
- 「**富の分布はベキ法則に従う**」
- 「**80対20の法則**」 厳密な「科学法則」ではない
 - ・ 富の8割は2割の人が所有している
 - ・ 商品売上げの8割は2割の商品が生み出す
 - ・ 売上げの8割は2割の顧客が生み出す
売上げ向上には、この2割の顧客を狙え
 - ・ 故障の8割は2割の部品に原因がある

Masahiro Mizutani

ロングテール



商品売上げの8割は2割の商品で達成される
(パレートの法則)。在庫制限のために、主
にこの2割の商品を揃えねばならず、他の8割
は「死に筋」として軽視されていた。

ネット販売では在庫制限はなく、
この8割をビジネスに組み込むこ
とによって無視できない売上げ
となっている。

masahiro Mizutani

2013年2月6日発表

Apple iTunes Music Store には2600万曲の楽曲

ダウンロード総数2500億

全曲が売りに貢献している

masahiro Mizutani

ネットワークに

何故ハブが

生じてしまうのか

(なぜ次数分布がベキ分布になるのか)

masahiro Mizutani