機 械 力 学 実 験

１．題目

1 自由度系の自由振動および強制振動実験

２．目的

振動系が強制振動を受ける場合, 加振振動数が固有振動数にほぼ一致すると振動系は大きく振動する．この現象を共振（resonance）と言い，このときの加振振動数を共振振動数と言う．

本実験では，まず質量とばねから成る 1 自由度系の固有振動数を測定し，計算値と比較する．次に，質量，ばね及び粘性減衰から成る 1 自由度系を振動台に取付けて強制振動を与え，いくつかの粘性減衰の値に対する共振曲線（加振振動数と質量の振幅の関係）を測定する．これらの結果から，共振現象，共振振動数と固有振動数の関係及び粘性減衰の大きさと共振時の振動の大きさの関係を理解する．

３．自由振動実験

3.1　ばねーマス系の自由振動

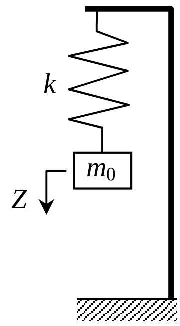

図 1

図 1 に示すような質量 m_0 とばね定数 k のコイルばねから成る 1 自由度振動系（ばねーマス系）を用いて，質量を適当な長さ Z_0（10，30，50 mm と変える）だけ下に引いてから手を離し，質量を自由振動させる．10 回往復する時間 T_r [秒]をストップウォッチで測定する．この値から固有周期 T [秒]（= T_r/10），および固有振動数 f_n（=1/T）[Hz]を求める．

減衰がない場合の固有振動数の理論値は次式で与えられる．

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1}$$

ここで，m は主質量 m_0 とコイルばねの等価質量の和を表し，

$$m = m_0 + \frac{m_c}{3} \tag{2}$$

ただし，m_c はコイルばねの質量とする．コイルばねのばね定数 k は次式で与えられる．

$$k = \frac{GI_P}{2\pi R^3 n} \tag{3}$$

ここで，G はばね鋼の横弾性係数（= 83.3 GPa），I_p は断面二次極モーメントで

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32} \tag{4}$$

となる．R はコイルばねの半径，d は線径，n は有効巻数とする．実験後に，ばねおよび主質量の重さをはかりで，直径はノギスで，線径はマイクロメータを使って測定し，巻数は目測（1/2 巻単位）する．最後に実験値と理論値を比較する．

【課題】

1) 数値のばらつきについて考察し，何が誤差に影響しているのか推察せよ．
2) ばねの等価質量として自重の 1/3 を加えるのはなぜか．

3.2　片持ちはりの自由振動

次に，図２に示すような長さ L の片持ちはりの先端に質量 m_0 の加速度計を取付け，はりの先端を適当な長さ Z_0（３回）だけ下にたわませてから手を離し，はりを自由振動させてオシロスコープ上に振動波形を描く．そのメモリから周期 T を測定する．

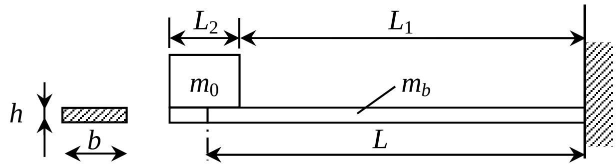

図２

この T の値を用いて振動系の固有振動数 f_n [Hz]を算出する．

片持ちはりの先端に集中荷重 P が加わったときの任意の位置 x におけるたわみ $y(x)$は，荷重点（図の左端）を原点とすると次式で与えられる．

$$y(x)=\frac{PL^3}{3EI}\left(\frac{3x^2}{2L^2}-\frac{x^3}{2L^3}\right)=y_0\left(\frac{3x^2}{2L^2}-\frac{x^3}{2L^3}\right) \tag{5}$$

y_0 は原点における最大たわみとする．ある振動数ωではりが揺れている時の運動エネルギーを K，および変形している時のひずみエネルギーを U とすると

$$K=\frac{1}{2}m_0{v_0}^2+\int_0^L\frac{1}{2}\rho Adx\left\{y_0\omega\left(\frac{3x^2}{2L^2}-\frac{x^3}{2L^3}\right)\right\}^2=\frac{1}{2}m_0(y_0\omega)^2+\frac{33\rho AL}{280}(y_0\omega)^2 \tag{6}$$

$$U=\int_0^L\frac{M^2}{2EI}dx=\frac{EI}{2}\int_0^L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}y_0\left(\frac{3x^2}{2L^2}-\frac{x^3}{2L^3}\right)\right\}^2dx=\frac{3EI}{2L^3}{y_0}^2 \tag{7}$$

となる．レイリーの方法（Rayleigh method）から，共振時において運動エネルギーK の最大値とひずみエネルギーU の最大値が等しいとおくと式(6)および(7)から

$$K=U \tag{8}$$

なので，ωについて整理すると固有角振動数の理論値ω_n が得られる．

$$\omega_n=\sqrt{\frac{3EI}{\left(m_0+\frac{33}{140}m_b\right)L^3}} \tag{9}$$

ここで，m_b ははりの自重（= ρAL），ρは密度，A は断面積，E は縦弾性係数（= 200 GPa），I は断面二次モーメントで

$$I=\frac{bh^3}{12} \tag{10}$$

ここで，b，h ははりの横幅，厚さである．ただし式(9)のはりの有効長さ L は次式で定義する．

$$L=L_1+\frac{L_2}{2} \tag{11}$$

実験後に，加速度計の質量をはかりで，はりの横幅はノギスで，厚さはマイクロメータで，有効長さは定規を使って測定する．最後に実験値と理論値を比較する．

【課題】

1) デジタルノギス・マイクロメータを使った場合と使わない場合で誤差はどの程度になるか，またその誤差の原因について推察せよ．
2) はりの自重 m_b を考慮しない場合，固有振動数はどうなるかを数値的に考察せよ．また，はりを１自由度振動系としたときのばね定数はどうなるかを考察せよ．

４．強制振動実験

図３に示すように，主質量 m，ばね定数 k のコイルばね，粘性減衰係数 c の空気ダンパから成る１自由度振動系が強制変位 $y = a\cos(\omega t)$（ω：加振角振動数，a：加振振幅）を受けたときの運動方程式は

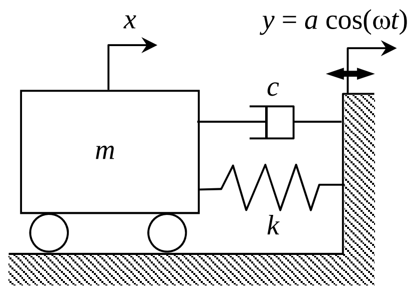

図３

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \tag{12}$$

上式の定常状態における解は

$$x = A\cos(\omega t - \gamma) \tag{13}$$

$$\left|\frac{A}{a}\right| = \sqrt{\frac{\omega_n{}^4 + 4\alpha^2\omega^2}{(\omega_n{}^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} = \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2 n^2}{(1 - n^2)^2 + 4\zeta^2 n^2}} \tag{14}$$

$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{2\alpha\omega^3}{\omega_n{}^2(\omega_n{}^2 - \omega^2) + 4\alpha^2\omega^2}\right) \tag{15}$$

ただし，

$$\alpha = \frac{c}{2m},\quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}},\quad \zeta = \frac{\alpha}{\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{mk}},\quad n = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{f}{f_n} \tag{16}$$

$|A/a|$と f/f_n の関係を図示すると，減衰がないときの図４の実線のようになり，また減衰があるときは図４の点線のようになる．これから，n が１に近づくと（加振振動数 f が系の固有振動数 f_n にほぼ一致すると）質量の振幅 A は急激に大きくなり（すなわち共振状態となり），減衰が少ないときほど共振点の高さは高くなる．減衰が極めて小さいときの共振点の高さは式(13)から次式で近似できる．

$$\left|\frac{A}{a}\right| \approx \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2}{4\zeta^2}} \approx \frac{1}{2\zeta} \tag{17}$$

１自由度振動系を水平正弦波加振台の上にのせ，加振振幅 a を一定（a = 1 mm 程度）に保ったまま振動数 f [Hz]を変えて質量の絶対振幅 A [mm]をレーザー変位計によって測定する．次に，共振曲線（f/f_n と$|A/a|$の関係）を描く．

空気ダンパの減衰の大きさを４種類（空気孔の数を 10，6，3，1 個）に変えて実験してみること．実験に先立ち, 式(1)により系の固有振動数 f_n を計算しておく．

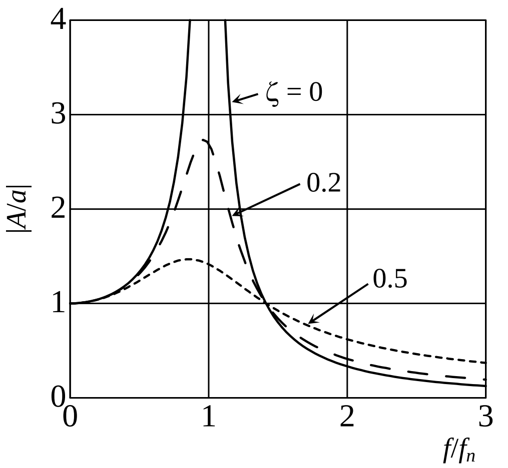

図４

【課題】

1) 式(12)から粘性減衰のない場合, およびある場合の強制振動の解，式(14)を正しく誘導せよ．
2) 式(14)の理論値から得られる共振曲線を実験から得られた共振曲線に加え，両者を比較する．また，共振振動数が固有振動数 f_n にほぼ一致するかを確かめる．
3) 本実験で用いた空気ダンパの粘性減衰係数および減衰比を式(17)からそれぞれ求め，空気孔と減衰の関係などを考察せよ．
4) 粘性減衰係数を測定する方法として，他にどんな方法があるか調べよ．