

数理解析特論 E 5/19 (金) 3 限「量子雑音の線形応答理論」(担当: 金本理奈) レポート問題

1. 調和ポテンシャル中の古典ブラウン粒子の変位のスペクトル密度は $S_{xx}(\omega) = \frac{2\gamma k_B T}{m[(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]}$ で与えられる。これをフーリエ変換することにより、 $t > 0$ に対する位置相関関数 $\mathcal{G}_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} S_{xx}(\omega)$ を次のように求める。

(a) $S_{xx}(\omega)$ の 4 つの極を、 $\gamma, \Omega^* \equiv \sqrt{\Omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$ を用いて表せ (ただし $\Omega > \gamma/2$)。

(b) $t > 0$ に対する $\mathcal{G}_{xx}(t)$ の積分は、留数定理により

$$\mathcal{G}_{xx}(t) = -2\pi i \sum [S_{xx}(\omega) e^{-i\omega t} \text{の下半面の留数}]$$

と求められる。前問で求めた極のうち、複素 ω 平面の下半面の留数を全て求め、相関関数 $\mathcal{G}_{xx}(t)$ が

$$\mathcal{G}_{xx}(t) = \frac{k_B T}{m\Omega^2} \left(\cos \Omega^* t + \frac{\gamma}{2\Omega^*} \sin \Omega^* t \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

の形で表されることを示せ。また緩和時間 τ を、減衰定数 γ で表せ。

2. ハミルトニアンが $\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2 \hat{x}^2$ で与えられる量子調和振動子を考える。 $\hat{x}, \hat{p}$ は交換関係

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar \quad (\hbar = h/(2\pi) \text{ は還元プランク定数})$$

を満たす。また、 $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega}}, \quad p_0 = \sqrt{\frac{\hbar m\Omega}{2}}$ は基底状態の位置・運動量の揺らぎの大きさを表す。

- (a) 位置演算子、運動量演算子 $\hat{x}, \hat{p}$ に対するハイゼンベルグの運動方程式 $i\hbar \dot{\hat{x}} = [\hat{x}, \hat{\mathcal{H}}], i\hbar \dot{\hat{p}} = [\hat{p}, \hat{\mathcal{H}}]$ を解くことにより、 $\hat{x}(t), \hat{p}(t)$ を求めよ。初期時刻 $t = 0$ の演算子は $\hat{x}(0), \hat{p}(0)$ とおくこと。
- (b) (a) で求めた解 $\hat{x}(t), \hat{p}(t)$ を、 $\hat{x}(t) = x_0(\hat{a}^\dagger(t) + \hat{a}(t)), \quad \hat{p}(t) = ip_0(\hat{a}^\dagger(t) - \hat{a}(t))$ と書き換えることにより、 $\hat{a}^\dagger(t), \hat{a}(t)$ の時間発展に書き換えよ。ただし、 $\hat{x}(0) = x_0(\hat{a}^\dagger(0) + \hat{a}(0)), \quad \hat{p}(0) = ip_0(\hat{a}^\dagger(0) - \hat{a}(0))$ とおくこと。
- (c) (b) の結果 $\hat{a}^\dagger(t), \hat{a}(t)$ は、ハミルトニアンを $\hat{\mathcal{H}} = \hbar\Omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$ としたときのハイゼンベルグの運動方程式 $i\hbar \dot{\hat{a}} = [\hat{a}, \hat{\mathcal{H}}]$ の解となっていることを確かめよ。

3. 温度 T の熱浴と接して熱平衡にある量子調和振動子が、量子数 n の励起状態 $\mathcal{E}_n$ を占有する確率は

$$\mathcal{P}(n) = \frac{e^{-\mathcal{E}_n/(k_B T)}}{Z} \text{ で与えられる。ここで } k_B \text{ はボルツマン定数、} \mathcal{E}_n \text{ は量子調和振動子のエネルギー固有値}$$

$$\mathcal{E}_n = \hbar\Omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad Z \text{ は確率の規格化定数 (分配関数) } Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mathcal{E}_n/(k_B T)} \text{ である。}$$

(a) 無限等比級数の和を実行することにより分配関数 Z を求め、確率 $\mathcal{P}(n)$ を求めよ。

(b) 温度 T における励起数の平均値 $\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathcal{P}(n)$ は、

$$\bar{n} = \frac{1}{2} \left[\coth \left(\frac{\hbar\Omega}{2k_B T} \right) - 1 \right]$$

で与えられることを示せ。