# $\mathfrak{S}_n$ $(n = 3, 4, 5)$ の部分群の分類

明治大学理工学部数学科
赤沼 浩之
堀部 昌裕
若杉 瞳

2009 年 2 月 25 日

## 1　はじめに

３次以上の代数方程式に関しての解の公式は、１６世紀以降のカルダノ (1501-1576)(３次方程式) やフェラーリ (1522-1565)(４次方程式) によって発見された。そして、フェラーリが４次方程式の解法を得て以降、５次方程式に関しては長い間解の公式が発見されずにいた。そこでラグランジュ(1736-1813) がその秘密を解き明かそうと方程式に関する一般論を展開しているが、５次以上の一般の方程式においては解の公式を発見することはできなかった。こうして５次以上の解の公式は謎に包まれていたが、「５次以上の方程式の代数的解法の不可能性」はアーベル (1802-1829) によって証明が与えられた。さらに、ガロア (1811-1832) によって代数方程式が代数的に解ける必要十分条件が、方程式のガロア群と呼ばれる「対称群」の部分群の性質を調べることによって知ることができるということが示された。我々は、ガロア群の性質を調べることで５次方程式の可解性の判定ができることに興味を持ち、今回の研究をするに至った。本論文では、$\mathfrak{S}_3$、 $\mathfrak{S}_4$、 $\mathfrak{S}_5$ の部分群を位数ごとに分類した。

「数字、番号を並び替える」という操作は様々な議論で利用される。日常生活、様々な場面で「並び替え」という考え方に出会うことも少なくない。例えば、「パズル」や、「トランプのカードの並び替え」等、誰もが一度は出会ったことがあるだろう。そのゲームに対応する群というのは、多くの場合は"自然"に対称群の部分群になっている。任意の有限群は対称群の部分群であるので、それはそうとも言えるが。

以下、3 次、4 次、5 次対称群の部分群による共役類の分類を表にまとめたものである。

# $\mathfrak{S}_3$ の部分群

| 位数 | 同値関係（共役）での代表元 | 共役な部分群の個数 |
|---|---|---|
| 1 | $\{ e \}$ | 1 |
| 2 | $\{ e , (12) \}$ | 3 |
| 3 | $\{ e , (123) , (132) \}$ | 1 |
| 6 | $\mathfrak{S}_3$ | 1 |
| | 計 | 6 |

# $\mathfrak{S}_4$ の部分群

| 位数 | 同値関係（共役）での代表元 | 共役な部分群の個数 |
|---|---|---|
| 1 | $\{ e \}$ | 1 |
| 2 | $\{ e , (12) \}$ | 6 |
| | $\{ e , (12)(34) \}$ | 3 |
| 3 | $\{ e , (123) , (132) \}$ | 4 |
| 4 | $\{ e , (1324) , (12)(34) , (1423) \}$ | 3 |
| | $\{ e , (12) , (34) , (12)(34) \}$ | 3 |
| | $\{ e , (12)(34) , (13)(24) , (14)(23)$ | 1 |
| 6 | 文字 4 を動かさない置換 | 4 |
| 8 | $< (12), (1324) >$ | 3 |
| 12 | $\mathfrak{A}_4$ | 1 |
| 24 | $\mathfrak{S}_4$ | 1 |
| | 計 | 30 |

# $\mathfrak{S}_5$ の部分群

| 位数 | 同値関係（共役）での代表元 | 共役な部分の個数 |
|---|---|---|
| 1 | $\{ e \}$ | 1 |
| 2 | $\{ e , (12) \}$ | 10 |
| | $\{ e , (12)(34) \}$ | 15 |
| 3 | $\{ e , (123) , (132) \}$ | 10 |
| 4 | $\{ e , (1324) , (12)(34) , (1423) \}$ | 15 |
| | $\{ e , (12) , (34) , (12)(34) \}$ | 15 |
| | $\{ e , (12)(34) , (13)(24) , (14)(23) \}$ | 5 |
| 5 | $< (12345) >$ | 6 |
| 6 | $< (123)(45) >$ | 10 |
| | $< (23), (123) >$ | 10 |
| | $< (23)(45), (123) >$ | 10 |
| 8 | $< (12), (1324) >$ | 15 |
| 10 | $< (12345), (25)(34) >$ | 6 |
| 12 | 文字 5 を動かさない偶置換 | 5 |
| | $\{1, 2, 3\}$ の置換と $\{4, 5\}$ の置換の積 | 10 |
| 15 | | 0 |
| 20 | $< (12345), (2354) >$ | 6 |
| 24 | 文字 5 を動かさない置換 | 5 |
| 30 | | 0 |
| 40 | | 0 |
| 60 | $\mathfrak{A}_5$ | 1 |
| 120 | $\mathfrak{S}_5$ | 1 |
| | 計 | 156 |

それによって得られた結果が上記の表である。上のリストで、共役な群が自分自身しかないものが正規部分群になる。つまり、上のリストで共役な群の個数が 1 つしかないものは正規部分群である。ゆえに $\mathfrak{S}_3$ の正規部分群は、$\{e\}$、$\mathfrak{A}_3$、$\mathfrak{S}_3$ の 3 つ。$\mathfrak{S}_4$ の正規部分群は$\{e\}$、$\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$、$\mathfrak{A}_4$、$\mathfrak{S}_4$ の４つ。$\mathfrak{S}_5$ の正規部分群は$\{e\}$、$\mathfrak{A}_4$、$\mathfrak{S}_5$、の３つである。上のリストにあるそれぞれの部分群が可解か否かはそれぞれの場合にチェックすることも可能であるが、次の定理はその判定の際に非常に有効である。

**定理 1.1 (バーンサイドの定理)**　位数が $p^a q^b$ *(*$p,q$ は異なる素数*)* の群は可解群である。

この定理により、位数が異なる 3 つの素数で割り切れない群は可解群であることがわかる。よって $\mathfrak{S}_3$、$\mathfrak{S}_4$ の部分群はすべて可解群であり、$\mathfrak{S}_5$ の部分群で可解群である可能性があるものは、位数 30、60、120 の群である。逆に、$D(\mathfrak{A}_5) = \mathfrak{A}_5$ であるから、確かに、$\mathfrak{A}_5$ と $\mathfrak{S}_5$ は可解群ではない。

一般的に $n$ 次方程式が解の公式を持つためには、すべての $n$ 次方程式のガロア群が可解群でなければならないが、ガロア群が $\mathfrak{S}_5$ になるものが存在するため、5 次方程式は解の公式を持たないことがわかる。

$\mathfrak{S}_n$ の部分群において共役を取るという動作を多々用いるが、以下のように共役というのは文字の入れ替えに対応していることに注意する。

$\gamma = (i_0 i_1 \ldots i_{k-1})$ が $\mathfrak{S}_n$ の $k$ 巡回元で,$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ なら,

$$\sigma\gamma\sigma^{-1} = (\sigma(i_0)\ldots\sigma(i_{k-1}))$$

になる.

# 2　$\mathfrak{S}_3$ の部分群

$^{\#}\mathfrak{S}_3 = 6$ であるので、$\mathfrak{S}_3$ の部分群の位数は 1, 2, 3, 6 のどれかである。

## 2.1　$\mathfrak{S}_3$ の位数 1, 6 の部分群

$\mathfrak{S}_3$ の位数 1 の部分群は $\{e\}$ のみである。また、$\mathfrak{S}_3$ の位数 6 の部分群は $\mathfrak{S}_3$ のみである。$\{e\}$ と $\mathfrak{S}_3$ は、正規部分群である。

## 2.2　$\mathfrak{S}_3$ の位数 2 の部分群

$H$ は、$\mathfrak{S}_3$ の位数 2 の部分群とする。$H$ は巡回群であるので、位数 2 の元 $\sigma$ で $H = \{e, \sigma\}$ を満たすものがある。$\mathfrak{S}_3$ の位数 2 の元は、(12), (13), (23) の 3 つである。よって、位数 2 の部分群は、$\{e, (12)\}, \{e, (13)\}, \{e, (23)\}$ の 3 つである。

### 2.3　$\mathfrak{S}_3$ の位数 3 の部分群

$H$ は、$\mathfrak{S}_3$ の位数 3 の部分群とする。$H$ は巡回群であるので、位数 3 の元 $\sigma$ で $H = \{e, \sigma, \sigma^2\}$ を満たすのもがある。$\mathfrak{S}_3$ の位数 3 の元は、(123), (132) の 2 つである。ここで、$(132) = (123)^2$ に注意する。よって、位数 3 の部分群は、$\{e, (123), (132)\}$ のみである。これは、3 次交代群 $\mathfrak{A}_3$ であり、$\mathfrak{S}_3$ の正規部分群である。

## 3　$\mathfrak{S}_4$ の部分群

${}^{\#}\mathfrak{S}_4 = 24$ であるので、$\mathfrak{S}_4$ の部分群の位数は 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 のどれかである。

### 3.1　$\mathfrak{S}_4$ の位数 1, 24 の部分群

$\mathfrak{S}_4$ の位数 1 の部分群は $\{e\}$ のみである。また、$\mathfrak{S}_4$ の位数 24 の部分群は $\mathfrak{S}_4$ のみである。$\{e\}$ と $\mathfrak{S}_4$ は正規部分群である。

### 3.2　$\mathfrak{S}_4$ の位数 12 の部分群

まず最初に、$n \geq 3$ のとき、$\mathfrak{S}_n$ の交換子群 $D(\mathfrak{S}_n)$ は、交代群 $\mathfrak{A}_n$ と一致することを示す。$\mathfrak{A}_n$ は指数 2 なので正規部分群であり、$\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n$ は巡回群なので、$D(\mathfrak{S}_n) \subset \mathfrak{A}_n$ である。また、$\mathfrak{A}_n$ は 3 巡回元によって生成されることはよく知られているが、3 巡回元 $\sigma = (ijk)$ に対し、

$$\sigma^2 = (ikj) = (ij)(ik)$$

$$\sigma = \sigma^4 = (ij)(ik)(ij)(ik)$$

であり、$(ij) = (ij)^{-1}, (ik) = (ik)^{-1}$ なので、$\sigma$ は互換 $(ij)$ と互換 $(ik)$ の交換子である。よって、$D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$ がわかった。

ここで、$H$ は $\mathfrak{S}_4$ の部分群で、位数が 12 とする。$[\mathfrak{S}_4 : H] = 2$ なので、$H$ は $\mathfrak{S}_4$ の正規部分群である。また、$\mathfrak{S}_4/H$ は位数 2 の群であるので、アーベル群になる。よって、$H \supset D(\mathfrak{S}_4) = \mathfrak{A}_4$ である。${}^{\#}\mathfrak{A}_4 = 4!/2 = 12 = {}^{\#}H$ より、$H = \mathfrak{A}_4$ になる。したがって、$\mathfrak{A}_4$ は指数 2 の唯一つの $S_4$ の部分群である。つまり、$\mathfrak{A}_4$ は $\mathfrak{S}_4$ の唯一つの位数 12 の部分群である.

### 3.3　$\mathfrak{S}_4$ の位数 2 の部分群

$H$ は、$\mathfrak{S}_4$ の位数 2 の部分群とする。$H$ は巡回群であるので、位数 2 の元 $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ で $H = \{e, \sigma\}$ をみたすものがある。$\mathfrak{S}_4$ の位数 2 の元は互換が 6 つ、$(ij)(kl)$ のタイプのものが 3 つある。よって、位数 2 の部分群は 9 つある。

## 3.4 $\mathfrak{S}_4$ の位数 3 の部分群

$H$ は、$\mathfrak{S}_4$ の位数 3 の部分群とする。$H$ は巡回群であるので、位数 3 の元 $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ で

$$H = <\sigma> = <\sigma^2> = \{e, \sigma, \sigma^2\}$$

をみたすものがある。$\mathfrak{S}_4$ の位数 3 の元は 3 巡回元であり、8 つある。よって、位数 3 の部分群は 4 つある。

## 3.5 $\mathfrak{S}_4$ の位数 6 の部分群

以下で使う Sylow の定理をここで紹介する。

**定理 3.1 (Sylow の定理)** $p$ は素数、$G$ は位数 $p^k m$ の有限群であるとする。$m$ は、$p$ の倍数ではないとする。

1. (第 1 定理) $G$ は位数 $p^k$ の部分群を含む。(この部分群を $G$ の $p$-Sylow 部分群という。)
2. (第 2 定理) $G$ の部分群 $H$ の位数が $p$ の冪ならば、$H$ はある $p$-Sylow 部分群に含まれる。
3. (第 3 定理) $G$ の $p$-Sylow 部分群は全て共役である。
4. (第 4 定理) $G$ の $p$-Sylow 部分群の個数は $m$ の約数であり、$p$ を法として 1 と合同である。

以下 $H$ は、$\mathfrak{S}_4$ の位数 6 の部分群とする。$|H| = 2 \times 3$ であるから Sylow の定理より位数 3 の部分群（$S_3$ とする) を含む。$H$ と $S_3$ のある共役 $H'$ と $S'_3$ を考えることにより、

$$S'_3 =< (123) >= \{e, (123), (132)\} \triangleleft H'$$

としてよい。ここで、$[H' : S'_3] = 2$ なので、$S'_3$ は $H'$ の正規部分群であることに注意する。よって、任意の $\sigma \in H'$ に対して、

$$\sigma(123)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)) \in S'_3$$

であるので、$\sigma$ は 4 を動かさないことがわかった。ここで、

$$\mathfrak{S}_4 \supset \{\sigma \in \mathfrak{S}_4 \mid \sigma(4) = 4\} \simeq \mathfrak{S}_3$$

であり、$H' \subset \{\sigma \in \mathfrak{S}_4 \mid \sigma(4) = 4\}$ となる。$^{\#}\mathfrak{S}_3 = 6$ より、

$$H' = \{\sigma \in \mathfrak{S}_4 \mid \sigma(4) = 4\}$$

である。これと共役な部分群は、明らかに 4 つある。

## 3.6 $\mathfrak{S}_4$ の位数 8 の部分群

$H$ は、$\mathfrak{S}_4$ の位数 8 の部分群とし、$V = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ とおく。ここで $\mathfrak{S}_4$ の位数は $24 = 2^3 \times 3$ であるので、$H$ は、$\mathfrak{S}_4$ の 2-Sylow 部分群である。

$V \triangleleft \mathfrak{S}_4$ であるので、Sylow の第 2 定理、第 3 定理より、すべての $\mathfrak{S}_4$ の 2-Sylow 部分群は $V$ を含む。再び、Sylow の第 2 定理、第 3 定理より、$H$ と共役な部分群 $S_2$ で $X = \{e, (12)\}$ を部分群として含むものがある。よって、$S_2 \supset X, V$ である。ここで、$K$ を $V$ と $X$ で生成される $\mathfrak{S}_4$ の部分群とすれば、$V \subsetneq K \subset S_2$ となり、$K = S_2$ であることがわかる。よって、

$$S_2 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (12), (34), (1324), (1423)\} \tag{1}$$

であり、位数 8 の部分群は必ず $S_2$ と共役であることがわかった。この群は、(12) と (1324) で生成された群である。

$S_2$ は互換 (12) と (34) を含むが、互換 (13) と (24) を含むもの、互換 (14) と (23) を含むものがある。

よって、位数 8 の部分群は 3 個ある。

## 3.7 $\mathfrak{S}_4$ の位数 4 の部分群

$H$ は、$\mathfrak{S}_4$ の位数 4 の部分群とする。$S_2$ は、式 (1) の群とする。Sylow の第 2 定理、第 3 定理より、$H \subset \sigma S_2 \sigma^{-1}$ を満たす $\sigma$ が存在する。よって、$\sigma^{-1} H \sigma \subset S_2$ となるので、$H$ は $S_2$ の位数 4 のある部分群 $K$ と $\mathfrak{S}_4$ 内で共役である。

$S_2$ の位数 4 の部分群 $K$ を求めよう。

(i) $K \ni (1324)$ または $K \ni (1423)$ の時。このときは、$K$ は、

$$G_1 = \{e, (1324), (12)(34), (1423)\} \tag{2}$$

と一致する。$\mathfrak{S}_4$ 内の 4 巡回元の個数が 6 個で、うち 2 個が入ることになるので、この $G_1$ と $\mathfrak{S}_4$ 内で共役な群の個数は 3 個である。

(ii) $K \not\ni (1324), (1423)$ で $K \ni (12)$ の時。もし、$K \ni (12)(34)$ ならば、$(12)(12)(34) = (34)$ より、$K$ は、

$$G_2 = \{e, (12), (34), (12)(34)\} \tag{3}$$

と一致する。$K \ni (13)(24)$ ならば、$(12)(13)(24) = (1324)$ であるから、$K \ni (1324)$ となり矛盾である。同様に $K \ni (14)(23)$ ならば、$(12)(14)(23) = (1423)$ であるから、$K \ni (1423)$ となり矛盾である。

以上より、$K = G_2$ であることがわかる。

(iii) $K \not\ni (1324), (1423)$ で $K \ni (34)$ の時。上の (ii) の場合と同様にして $K = G_2$ である。

(ii), (iii) のケースでは、この $G_2$ と $\mathfrak{S}_4$ 内で共役なものの個数は、1, 2, 3, 4 を二つの元からなる二つの集合に分ける場合の数だけあるので、3 である。

(iv) $K \not\ni (1324), (1423), (12), (34)$ の時。このとき、$K$ は、

$$G_3 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \tag{4}$$

になる。$G_3 \triangleleft \mathfrak{S}_4$ より、$K$ と $\mathfrak{S}_4$ 内で共役な群は 1 個である。

以上より、位数 4 の $\mathfrak{S}_4$ の部分群は合計 7 個である。

# 4 $\mathfrak{S}_5$ の部分群

${}^\#\mathfrak{S}_5 = 120$ であるので、$\mathfrak{S}_5$ の部分群の位数は 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120 のどれかである。

## 4.1 $\mathfrak{S}_5$ の位数 1, 120 の部分群

$\mathfrak{S}_5$ の位数 1 の部分群は $\{e\}$ のみである。また、$\mathfrak{S}_5$ の位数 120 の部分群は $\mathfrak{S}_5$ のみである。$\{e\}$ と $\mathfrak{S}_5$ は正規部分群である。

## 4.2 $\mathfrak{S}_5$ の位数 60 の部分群

$\mathfrak{S}_5$ の位数 60 の部分群を $H$ とする。$[\mathfrak{S}_5 : H] = 2$ であるから $H$ は正規部分群である。$\mathfrak{S}_5$ の交換子群を $D(\mathfrak{S}_5)$ とすると、$\mathfrak{S}_4$ の位数 12 の部分群のところで証明したように、$D(\mathfrak{S}_5) = \mathfrak{A}_5$ が成立する。$\mathfrak{S}_5/H$ の位数は 2 でアーベル群になるので、$\mathfrak{A}_5 = D(\mathfrak{S}_5) \subset H$ になる。${}^\#H = 60 = {}^\#\mathfrak{A}_5$ であるから $H = \mathfrak{A}_5$ になる。

よって、位数 60 の部分群は $\mathfrak{A}_5$ のみである。

## 4.3 $\mathfrak{S}_5$ の位数 40 の部分群

まず、次を証明する。

**補題 4.1** $G$ は有限群、$H$ は $G$ の指数 $n$ の部分群であれば、$\mathrm{Ker}(\phi) \subset H$ をみたす準同型 $\phi : G \longrightarrow \mathfrak{S}_n$ が存在する.

**証明** $X$ を $G$ における $H$ の左剰余類の集合とする。$^{\#}X = n$ なので、$\mathfrak{S}_X \simeq \mathfrak{S}_n$ になる。ここで、

$$\mathfrak{S}_X = \{ f : X \to X \mid f \text{ は全単射} \}$$

であり、$\mathfrak{S}_X$ は写像の合成で群になる。

$g \in G$ に対して、$\phi(g) : X \to X$ を $aH \overset{\phi(g)}{\mapsto} gaH$ で定義する。明かに $\phi(g)$ の逆写像は $\phi(g^{-1})$ なので、$\phi(g)$ は全単射であり、従って $\phi(g) \in \mathfrak{S}_X$ である。

ここで、$\phi : G \to \mathfrak{S}_X$ を $g \mapsto \phi(g)$ で定義する。$g, g' \in G$ に対し,

$$\phi(g)\phi(g') : aH \mapsto g'aH \mapsto g(g'aH)$$

$$\phi(gg') : aH \mapsto gg'aH$$

であるので、$\phi(g)\phi(g') = \phi(gg')$ が成立する。よって、$\phi$ は準同型である。

$g \in \mathrm{Ker}\,\phi$ とする。すると、$\phi(g)$ が $X$ 上の恒等写像である。このとき、任意の $a \in G$ に対して $\phi(g) : aH \mapsto aH$ となる。とくに、$\phi(g) : H \mapsto H$ なので $gH = H$ となり、$g \in H$ であることがわかる。つまり、$\mathrm{Ker}\,\phi \subset H$ である。 **証明終**

ここで、$H$ は $\mathfrak{S}_5$ の位数 40 の部分群とする。$H$ の指数は、$[\mathfrak{S}_5 : H] = 120/40 = 3$ である。補題 4.1 より、$\mathrm{Ker}(\phi) \subset H$ である準同型写像 $\phi : \mathfrak{S}_5 \to \mathfrak{S}_3$ が存在する。ここで、$\mathrm{Ker}(\phi)$ は $\mathfrak{S}_5$ の正規部分群より、位数は 1, 60, 120 のいずれかである ($\mathfrak{S}_5$ の類等式は簡単に計算できる。それを用いれば、正規部分群は $\{e\}, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{S}_5$ の三つであることが示される)。$^{\#}H = 40$ より $\mathrm{Ker}(\phi) = \{e\}$ が分かり、$\phi$ は単射で $\mathfrak{S}_5$ は $\mathfrak{S}_3$ の部分群になり矛盾が生じる。

よって、$\mathfrak{S}_5$ は位数 40 の部分群を持たないことがわかった。

## 4.4 $\mathfrak{S}_5$ の位数 30 の部分群

$H$ は $\mathfrak{S}_5$ の位数 30 の部分群とする。

$H$ の指数は、$[\mathfrak{S}_5 : H] = 120/30 = 4$ であるので、補題 4.1 より、$\mathrm{Ker}(\phi) \subset H$ である準同型写像 $\phi : \mathfrak{S}_5 \to \mathfrak{S}_4$ が存在する。ここで、$\mathrm{Ker}(\phi)$ は $\mathfrak{S}_5$ の正規部分群より、位数は 1, 60, 120 のいずれかである。$^{\#}H = 30$ より、$\mathrm{Ker}(\phi) = \{e\}$ が分かり、$\phi$ は単射で $\mathfrak{S}_5$ は $\mathfrak{S}_4$ の部分群になり矛盾が生じる。

よって、$\mathfrak{S}_5$ は位数 30 の部分群を持たないことがわかった。

## 4.5 $\mathfrak{S}_5$ の位数 2 の部分群

$H$ を $\mathfrak{S}_5$ の位数 2 の部分群とすると、$H = \{e, \sigma\}$ をみたす位数 2 の元 $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ が存在する。よって、位数 2 の部分群と 位数 2 の元は 1 対 1 対応をすることがわかる。$\mathfrak{S}_5$ の位数 2 の元は $(ij), (ij)(kl)$ のいずれかの形をしている。よって、 $H$ は、$H_1 = \{e, (12)\}$ または、$H_2 = \{e, (12)(34)\}$ のどちらかと共役になる。

(i) $H_1$ と共役なとき。(12) の中の数字の組み合わせの数だけ群があるので、10 個存在する。

(ii) $H_2$ と共役なとき。(12)(34) の中の数字の組み合わせの数だけ群があるので、15 個存在する。

以上より、$\mathfrak{S}_5$ の位数 2 の部分群は 25 個である。

## 4.6　$\mathfrak{S}_5$ の位数 3 の部分群

$H$ を $\mathfrak{S}_5$ の位数 3 の部分群とすると、$H$ は巡回群であり位数 3 の元 $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ で $H = <\sigma> = <\sigma^2> = \{e, \sigma, \sigma^2\}$ をみたすものが存在する。よって、位数 3 の元二つと単位元で位数 3 の部分群一つができる。位数 3 の元は $(ijk)$ の形をしているので、$H$ は $K = \{e, (123), (132)\}$ と共役であることがわかる。$(123) = (231) = (312)$ であるから、位数 3 の元は 20 個ある。よって、位数 3 の群は 10 個ある。

## 4.7　$\mathfrak{S}_5$ の位数 5 の部分群

$H$ を $\mathfrak{S}_5$ の位数 5 の部分群とすると、$H$ は巡回群であり位数 5 の元 $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ で

$$H = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \} = <\sigma> = <\sigma^2> = <\sigma^3> = <\sigma^4>$$

と書ける。よって、位数 5 の元四つと単位元で位数 5 の部分群が一つできる。また、位数 5 の元は $(ijklm)$ の形をしているので、$H$ は $K = \{e, (12345), (13524), (14253), (15432)\}$ と共役であることがわかる。$(12345) = (23451) = (34512) = (45123) = (51234)$ であるから、位数 5 の元は 24 個ある。よって、位数 5 の群は 6 個ある。

## 4.8　$\mathfrak{S}_5$ の位数 8 の部分群

式 (1) の群 $S_2$ は位数が 8 で $\mathfrak{S}_5$ の部分群である。また、$\mathfrak{S}_5$ の 2-Sylow 群を考えると、これも位数が 8 であるから、Sylow の第 3 定理より、$\mathfrak{S}_5$ の位数 8 の部分群はすべて $S_2$ と共役であることがわかる。$S_2$ は互換 (12) と (34) を含むが、この互換の中の数字の組み合わせだけ共役なものが存在する。ゆえに求める $\mathfrak{S}_5$ の位数 8 の部分群は 15 個である。

## 4.9　$\mathfrak{S}_5$ の位数 15 の部分群

$H$ は $\mathfrak{S}_5$ の位数 15 の部分群とする。$H$ の 3-Sylow 部分群を $S_3$、5-Sylow 部分群を $S_5$ とおく。

Sylow の第 4 定理より $H$ は 3-Sylow 部分群を $1+3r$ 個もつが、$1+3r$ は 5 の約数である。よって、3-Sylow 部分群はただ一つ存在する。同様に 5-Sylow 部分群もただ一つ存在する。

このことより、$S_3$ と $S_5$ はともに $H$ の正規部分群であり、よって、$H \simeq S_3 \times S_5$ となることが知られている。

また、$S_3$ と $S_5$ は共に巡回群であるので $H \simeq C_3 \times C_5 = C_{15}$ となる。

しかし、$\mathfrak{S}_5$ 内に位数 15 の元は存在しない。よって、位数 15 の部分群は存在しない。

## 4.10 $\mathfrak{S}_5$ の位数 4 の部分群

$\mathfrak{S}_4$ の位数 4 の部分群のときとまったく同様な議論により、$G_1$ と共役なものが 15 個、$G_2$ と共役なものが 15 個、$G_3$ と共役なものが 5 個あることがわかり、合計 35 個存在する。

## 4.11 $\mathfrak{S}_5$ の位数 10 の部分群

まず、次の定理を証明する。

**定理 4.2** $G$ は群で、$G \ni \sigma, \xi$ とする。$\mathrm{ord}(\sigma) = 2$, $\mathrm{ord}(\xi) = n$, $\sigma\xi = \xi^{-1}\sigma$ (ただし、$n > 2$) と仮定する。このとき、$<\sigma, \xi> = \{e, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}, \sigma, \sigma\xi, \ldots, \sigma\xi^{n-1}\}$ である。ここで、$e, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}, \sigma, \sigma\xi, \ldots, \sigma\xi^{n-1}$ はすべて異なる元である。

**証明** $\tau$ は、$\sigma, \xi, \sigma^{-1}, \xi^{-1}$ の有限回の積とする。このとき、$\sigma^{-1} = \sigma, \xi^{-1} = \xi^{n-1}$ であり、$\xi^{-1}\sigma = \sigma\xi$ より $\xi\sigma = \sigma\xi^{-1}$ である。よって、$\sigma$ の左側にある $\xi$ や $\xi^{-1}$ は、右側に移動させることができる。故に、$\tau = \sigma^a\xi^b$ ($a = 0, 1$; $b = 0, \ldots, n-1$) と書ける。ここで、$<\sigma, \xi> \ni \xi$ より、$<\sigma, \xi>$ の位数は $n$ の倍数でなくてはならない。もし、$<\sigma, \xi>$ の位数が $n$ ならば、$<\sigma, \xi> = <\xi>$ であって、$\xi$ と $\sigma$ は交換可能になり矛盾である。ここで、$n \neq 2$ より $\xi \neq \xi^{-1}$ に注意する。よって、$<\sigma, \xi>$ の位数は $2n$ 以上である。故に、この $2n$ 個の元は、すべて異なっている。 **証明終**

$H$ は $\mathfrak{S}_5$ の位数 10 の部分群とする。$^{\#}H = 10 = 2 \times 5$ より、$H$ は 5-Sylow 部分群を含む。それは位数 5 の巡回群であり、$<(ijklm)>$ と表せる。共役をとって、

$$H' := \tau H \tau^{-1} \supset \tau\langle(ijklm)\rangle\tau^{-1} = \langle(12345)\rangle$$

とできる。よって、$H' \supset S_5 := <(12345)>$ としてよい。$[H' : S_5] = 2$ であるので、$H' \rhd S_5$ である。

また、Sylow の定理により、$H$ は位数 2 の元を持つ。それを $\sigma$ とする。$\sigma$ は互換、または台の交わらない二個の互換の積で表せる。

$\xi = (12345)$ とすると、

$$\sigma\xi\sigma^{-1} \in S_5 = <\xi>$$

であるので、

$$\sigma\xi\sigma^{-1} = \xi^l$$

と書ける。ただし、$l = 0, 1, 2, 3, 4$ である。このとき、

$$\xi = \sigma(\sigma\xi\sigma^{-1})\sigma^{-1} = \sigma\xi^l\sigma^{-1} = (\sigma\xi\sigma^{-1})^l = (\xi^l)^l = \xi^{(l^2)}$$

であるので、$l = 1$ 又は 4 である。

(i) $l = 1$ のとき。$\sigma\xi\sigma^{-1} = \xi = (12345)$ である。このとき、

$$(12345) = (\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)\sigma(5))$$

であるので、これを満たす $\sigma$ は次の 5 つなかのどれかである。

$$e,\ (12345),\ (13524),\ (14253),\ (15432)$$

しかし、$\mathrm{ord}(\sigma) = 2$ に矛盾する。

(ii) $l = 4$ のとき。このとき、$\sigma\xi\sigma^{-1} = \xi^4 = (15432)$ である。

$$(15432) = (\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)\sigma(5))$$

であるので、これを満たす $\sigma$ は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (25)(34)$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (15)(24)$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (14)(23)$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (13)(45)$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12)(35)$$

の 5 つである。このケースでは、定理 4.2 により、$<\xi, \sigma>$ は位数 10 の群を生成するはずである。ここで、(12345) と (25)(34) で生成される群を $H'$ とすると、

$$H' = \left\{ \begin{matrix} e, & (12345), & (13524), & (14253), & (15432), \\ (25)(34), & (12)(35), & (13)(45), & (14)(23), & (15)(24) \end{matrix} \right\}$$

である。これは、$^{\#}H' = 10$ であり、$<(12345),(25)(34)>, <(12345),(15)(24)>, <(12345),(14)(23)>, <(12345),(13)(45)>, <(12345),(12)(35)>$ はすべて同じ群である。よって、$\xi$ を含む位数 10 の群は $H'$ ただ一つである。位数 5 の部分群ごとに位数 10 の部分群が一つずつ存在するので、位数 10 の部分群は 6 個ある。

## 4.12 $\mathfrak{S}_5$ の位数 6 の部分群

$H$ を $\mathfrak{S}_5$ の位数 6 の部分群とする。Sylow の定理より、$H$ は位数 2 と 3 の元を含む。

まず、$H$ が巡回群の場合を考える。位数 6 の元は $(ijk)(lm)$ の形であるので、$H$ は $\{e,(123)(45),(132),(45),(123),(132)(45)\}$ と共役である。共役な群の個数は、数字の入れ替えだけあるので 10 である。

$H$ が、巡回群でないとしよう。$H$ を共役でずらして $H' \ni (123)$ としてよい。$<(123)>$ は $H'$ 内で指数が 2 となるので、$H' \triangleright <(123)>$ である。$H$ の位数は 6 であるから、Sylow の定理により、$H'$ は位数 2 の元 $\sigma$ を含む。$\sigma$ は $(ij)$ または $(ij)(km)$ の形である。

$\xi = (123)$ とおく。$\sigma(123)\sigma^{-1} = \xi^l$ (ただし、$l = 0,1,2$) と書ける。$i = 0$ とすると、$\xi = e$ となって矛盾する。よって、$l = 1,2$ であることがわかる。もし、$l = 1$ ならば、$\sigma\xi\sigma^{-1} = \xi$ となる。すると、$\xi$ と $\sigma$ は交換可能になり、$\xi\sigma$ の位数は 6 になり、$H'$ は巡回群になり矛盾である。よって、$l = 2$ であることがわかる。このとき、

$$\sigma\xi\sigma^{-1} = \xi^2 = (132)$$

である。このとき、$(\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3))$ は、$(1,3,2)$, $(3,2,1)$ または、$(2,1,3)$ のいずれかになる。

(i) $(\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3)) = (1,3,2)$ の場合。このとき、$\sigma = (23)$ または $(23)(45)$ である。

このとき、$H'$ は $<(23),(123)> = \{e,(123),(132),(23),(13),(12)\}$ か、または $<(23)(45),(123)> = \{e,(123),(132),(23)(45),(13)(45),(12)(45)\}$ となる。

(ii) $(\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3)) = (3,2,1)$ の場合。このとき、$\sigma = (13)$ または $(13)(45)$ である。このケースでは、(i) と同じ群になる。

(iii) $(\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3)) = (2,1,3)$ の場合。このとき、$\sigma = (12)$ または $(12)(45)$ である。このケースでも、(i) と同じ群になる。

ゆえに (i) の場合の数の入れ替えだけ共役な群があることになるので、$<(23),(123)>$ と共役な群が 10 個、$<(23)(45),(123)>$ と共役な群が 10 個ある。

以上より $\mathfrak{S}_5$ の位数 6 の部分群は合計 30 個ある。

## 4.13　$\mathfrak{S}_5$ の位数 20 の部分群

$H$ は、$\mathfrak{S}_5$ の位数 20 の部分群であるとする。

$|H| = 2^2 \times 5$ より、シローの定理によって、位数 5 の元を含む。$H$ をその共役でずらして $H \ni (12345)$ としてよい。

シローの定理により、$H$ の 5-Sylow 部分群の個数は 20 の約数であり、5 を法として 1 と合同である。よって、$<(12345)>$ は唯一つの $H$ の 5-Sylow 部分群である。よって、$H \triangleright <(12345)>$ である。$<(12345)>$ を $S_5$ と表す。

ここで、$\sigma \in H$ は位数 2 の元とする。このとき、$\sigma$ の位数が 2 であることから、

$$\sigma(12345)\sigma^{-1} = (12345)^m \quad (m = \pm 1)$$

である。ここで、$m = 1$ とすると $\sigma(12345) = (12345)\sigma$ となり $\mathrm{ord}(\sigma(12345)) = 10$ であるが、$\mathfrak{S}_5$ には位数 10 の元はないので矛盾である。よって、$m = -1$ である。

$H$ の 2-Sylow 部分群を $S_2$ とする。$S_2$ は位数 4 の部分群であるので、式 (2), (3), (4) の群 $G_1, G_2, G_3$ のどれかと共役である。

もし $S_2$ が式 (3) の $G_2$ と共役であるならば、

$$H \supset S_2 = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

ただし、

$$\mathrm{ord}(\sigma_1) = \mathrm{ord}(\sigma_2) = \mathrm{ord}(\sigma_3) = 2$$

であり、$\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3$ である。このとき、

$$\sigma_1\sigma_2(12345)(\sigma_1\sigma_2)^{-1} = \sigma_3(12345)\sigma_3^{-1} = (12345)^{-1}$$
$$\sigma_1\sigma_2(12345)(\sigma_1\sigma_2)^{-1} = \sigma_1\{\sigma_2(12345)\sigma_2^{-1}\}\sigma_1^{-1} = \sigma_1(12345)^{-1}\sigma_1^{-1} = (12345)$$

となり矛盾である。

同様にして $S_2$ は式 (4) の $G_3$ とも共役ではない。

よって、$S_2$ は式 (2) の $G_1$ と共役としてよい。つまり 2-Sylow 部分群は巡回群である。それを $<\tau>$ とする。ここで、$\mathrm{ord}(\tau) = 4$ である。

このとき、位数を考慮すれば $H = <(12345), \tau>$ となるはずである。

また、

$$\tau(12345)\tau^{-1} = (12345)^m \quad (m = 0, 1, 2, 3, 4)$$
$$(12345)^{(m^2)} = \tau^2(12345)\tau^{-2} = (12345)^{-1} \qquad (\mathrm{ord}(\tau^2) = 2 \text{ より})$$

であるので、合同式 $m^2 \equiv -1 \ (5)$ が成立する。よって、$m = 2, 3$ である。

$m = 3$ なら $\tau^3$ の位数は 4 であり、

$$\tau^3(12345)\tau^{-3} = (12345)^{(m^3)} = (12345)^2$$

であるので、$\tau^3$ を $\tau$ と取り換えると、

$$\tau(12345)\tau^{-1} = (12345)^2$$

であるので、$m = 2$ としてよい。
　このとき、

$$\tau(12345)\tau^{-1} = (\tau(1)\tau(2)\tau(3)\tau(4)\tau(5)) = (12345)^2 = (13524)$$

であるので、$\tau$ は、(2354), (1325), (1534), (1243), (1452) のどれかである。
　しかし、

$$\begin{aligned}(2354)(12345) &= (1325)\\(1325)(12345) &= (1534)\\(1534)(12345) &= (1243)\\(1243)(12345) &= (1452)\end{aligned}$$

であるので、$<(12345),(2345)>, <(12345),(1325)>, <(12345),(1534)>, <(12345),(1243)>, <(12345),(1452)>$ はすべて同じ群であり、これらは位数 20 の群になる。($\xi = (12345)$, $\tau = (2345)$ とおくと、$\mathrm{ord}(\xi) = 5$, $\mathrm{ord}(\sigma) = 4$, $\tau\xi\tau^{-1} = \xi^2$ をみたす。$\xi^{-1}\tau = \tau\xi^2$ や $\xi\tau = \tau\xi^3$ に注意すれば、$<\xi,\tau>$ の任意の元は $\tau^a\xi^b$ ($a = 0,1,2,3$; $b = 0,1,2,3,4$) と書け、これらの 20 個の元はすべて異なるので、$<\xi,\tau>$ は位数 20 の群になる。)
　$\mathfrak{S}_5$ の中には $S_5$ と共役な群は 6 個あるので、$N_{\mathfrak{S}_5}(S_5)$ の位数は $120/6 = 20$ である。ここで、$H \triangleright S_5$ であるので、

$$H \subseteq \{\sigma \in \mathfrak{S}_5 | \sigma S_5 \sigma^{-1} = S_5\} = N_{\mathfrak{S}_5}(S_5)$$

である。よって、$H = N_{\mathfrak{S}_5}(S_5)$ であり、位数 5 の群に対して唯一つ位数 20 の群が決まることがわかる。位数 5 の群は 6 個あるので、位数 20 の群は 6 つある。

## 4.14　$\mathfrak{S}_5$ の位数 24 の部分群

　$H$ は $\mathfrak{S}_5$ の位数 24 の部分群とする。$24 = 2^3 \times 3$ に注意する。$H$ の 2-Sylow 部分群は $\mathfrak{S}_5$ の 2-Sylow 部分群にもなる。よって、必要であれば $H$ を共役でずらして、$H$ は式 (1) の群を含むとしてよい。$\sigma$ は、$H$ の位数 3 の元であるとする。このとき、$\sigma = (ijk)$ と書ける。ここで、$1 \le i < j < k \le 5$ である。

　(i) $k \neq 5$ のとき。5 を動かさない置換全体を $N$ とする。

$$N := \{\sigma \in \mathfrak{S}_5 | \sigma(5) = 5\} \tag{5}$$

$N$ は、$\mathfrak{S}_4$ と同型な部分群であることに注意する。$N$ は、$S_2$ と $\sigma$ で生成された部分群 $<S_2, \sigma>$ を含んでいるが、位数を考えれば $N = <S_2, \sigma>$ となる。よってこのとき、$H = N$ となる。

これと共役な部分群は、5 個ある。

(ii) $k = 5$ としよう。必要ならば、$S_2$ の元で $\sigma$ の共役をとって $i = 1$ としてよい。更に (必要なら) (34) で共役をとって、$\sigma = (125)$ または (135) としてよい。

(a) $\sigma = (125)$ のとき。

$$(13)(24)(125)((13)(24))^{-1} = (345)$$
$$(345)(125)(345)^{-1} = (123)$$

であり、$H \ni (123)$ となる。よって、$\sigma = (123)$ でとり換えれば、$k \neq 5$ のケースになる。(このケースでは、$H$ は $N$ を真に含んでしまうので、結果的には位数 24 にはならない。)

(b) $\sigma = (135)$ のとき。

$$(12)(34)(135)((12)(34))^{-1} = (245)$$
$$(245)(135)(245)^{-1} = (132)$$

であり、$H \ni (132)$ となる。よって、$\sigma = (132)$ でとり換えれば、$k \neq 5$ のケースになる。(このケースでは、$H$ は $N$ を真に含んでしまうので、結果的には位数 24 にはならない。)

よって、位数 24 の群は 5 個である。

## 4.15 $\mathfrak{S}_5$ の位数 12 の部分群

$H$ を $\mathfrak{S}_5$ の位数 12 の部分群とする。$H$ の 2-Sylow 部分群 $S$ の位数は 4 であるので、$S \subset S_2$ をみたす $\mathfrak{S}_5$ の 2-Sylow 部分群 $S_2$ が存在する。必要ならば共役でずらすことにより、$S_2$ は式 (1) の群であるとしてよい。すると、$S$ は、式 (2), (3), (4) の群 $G_1, G_2, G_3$ のどれかと一致する。$H$ の位数は 12 なので、位数 3 の元 $\tau$ で、$H =< S, \tau >$ となるはずである。$\tau = (ijk)$ とおく。ただし、$1 \leq i < j < k \leq 5$ としてよい。

(i) $S = G_3$ の場合。

(a) $k \leq 4$ の場合。式 (5) の群 $N$ は $\mathfrak{S}_4$ と同型であるので、位数 12 の部分群をただ一つもつ。それを $M$ とおく。$M$ は、文字 5 を動かさない偶置換全体である。このとき、

$$\mathfrak{S}_5 \supset N \supset M \supset H =< G_3, \tau >$$

である。$M$ と $H$ の位数はともに 12 であるので、$H = M$ となる。数の入れ替えを考えて、これと共役なものは 5 個ある。

(b) $k = 5$ の場合。$G_3$ の元を用いて $\tau$ を共役で取り替えて $\tau = (1j5)$ としてよい。

(1) $j = 2$ の場合。$H \ni (125)$ であるので、

$$(13)(24)(125)\{(13)(24)\}^{-1} = (345)$$

であり、

$$(345)(125)(345)^{-1} = (123)$$

となる。このとき、$H \supset M = < G_3, (123) >$ であるが、$H \ni (345)$ であり $M \not\ni (345)$ であるので、$H$ の位数は 12 より大きくなって矛盾である。

(2) $j = 3$ の場合。

$$(12)(34)(135)\{(12)(34)\}^{-1} = (245)$$

であり、

$$(245)(135)(245)^{-1} = (132)$$

であるので、(1) と同様の理由により矛盾である。

(3) $j = 4$ の場合。

$$(12)(34)(145)\{(12)(34)\}^{-1} = (235)$$

であり、

$$(235)(145)(235)^{-1} = (142)$$

であるので、この場合も (1) と同様の理由により矛盾である。

以上より、$k = 5$ の場合、群はない。

(ii) $G = G_1$ の場合。

(a) $k \leq 4$ の場合。このとき、$H$ は $N$ の位数 12 の部分群である。しかし、$N$ は位数 12 の部分群 $M$ をただ一つ持つ。$M$ は、文字 5 を動かさない偶置換全体である。しかし、$(1423) \notin M$ より、$< G_1, \tau > \neq M$ なので、この場合、位数 12 の群は存在しない。

(b) $k = 5$ の場合。$\tau$ を $G_1$ の元を用いて共役でずらして、$\tau = (1j5)$ としてよい。

(1) $j=2$ の場合。$H \ni (125)$ であるので、

$$(1324)(125)\{(1324)\}^{-1} = (345)$$

であり、

$$(345)(125)(345)^{-1} = (123)$$

となる。このとき、$H \supset N = <G_1, (123)>$ であるが、$H$ の位数は 12 より大きくなって矛盾である。($N$ の位数 12 の部分群は $M$ のみである。ここで、$M$ は、文字 5 を動かさない偶置換全体である。$<G_1, (123)>$ は $N$ の部分群で位数は 12 の倍数であるが、$M \not\supset <G_1, (123)>$ であるので、$N = <G_1, (123)>$ である。)

(2) $j=3$ の場合。$H \ni (135)$ であるので、

$$(1423)(135)\{(1423)\}^{-1} = (415)$$

であり、

$$(145)(135)(145)^{-1} = (431)$$

となり、(1) の場合と同様の議論により矛盾である。

(3) $j=4$ の場合。$H \ni (145)$ であるので、

$$(1423)(145)\{(1423)\}^{-1} = (425)$$

であり、

$$(425)(145)(425)^{-1} = (124)$$

となり、(1) の場合と同様の議論により矛盾である。

以上より、$G = G_1$ の場合は位数 12 の部分群は存在しない。

(iii) $G = G_2$ の場合。

(a) $k \leq 4$ の場合。(ii), (a) の場合と同様の議論により、存在しないことがわかる。

(b) $k = 5$ の場合。$G_2$ の元を用いて $\tau$ を共役で取り替えて $\tau = (1j5)$ または $\tau = (345)$ としてよい。

(1) $H = <G_2, (125)>$ の場合。

$$<G_2, (125)> = \begin{Bmatrix} e, & (12), & (15), & (25), & (125), & (152), \\ (34), & (12)(34), & (15)(34), & (25)(34), & (125)(34), & (152)(34) \end{Bmatrix}$$

である。この群は、$\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_2$ である。このとき、共役のものの個数は文字の入れ替えの個数だけあるので、10 個である。

(2) $H = < G_2, (135) >$ の場合。

$$\begin{aligned}(12)(135)(12)^{-1} &= (235)\\ (315)(235)(315)^{-1} &= (213)\end{aligned}$$

となり、(ii), (b), (1) の場合と同様の議論により矛盾する。

(3) $H = < G_2, (145) >$ の場合。

$$\begin{aligned}(34)(145)(34)^{-1} &= (135)\\ (135)(145)(135)^{-1} &= (341)\end{aligned}$$

となり、上の (2) と同様に矛盾する。

(4) $H = < G_2, (345) >$ の場合。

$$< G_2, (345) > = \begin{Bmatrix} e, & (34), & (35), & (45), & (345), & (354), \\ (12), & (34)(12), & (35)(12), & (45)(12), & (345)(12), & (354)(12) \end{Bmatrix}$$

である。これは、$< G_2, (125) >$ と共役な群になる。

以上より、$G = G_2$ の場合、群の個数は全部で 10 個であり、すべて共役である。

ゆえに、$\mathfrak{S}_5$ の位数 12 の部分群は全部で 15 個である。

# 参考文献


[1] 堀田良之、代数入門–群と加群– (裳華房)

[2] Rotman, Galois theory, Springer