Symbolic Rees algebras of space monomial primes of degree 5

蔵野和彦（明治大学）

このスライドと資料は，

https://www.isc.meiji.ac.jp/~kurano

からダウンロードできます．

（Kurano's home page で検索して下さい）

k：体，　a, b, c：pairwise coprime，$\sqrt{abc} \notin \mathbb{Q}$ とする．

$$S := k[\overset{a}{x}, \overset{b}{y}, \overset{c}{z}] \xrightarrow{\varphi} k[\overset{1}{T}] \quad \text{graded } k\text{-alg. hom.}$$

$$x \longmapsto T^a$$
$$y \longmapsto T^b$$
$$z \longmapsto T^c$$

$P := P_{a,b,c} := \operatorname{Ker}\varphi$．とすると．$\mu(P) = 2$ or 3

$$P = (x^{s_2+s_3} - y^{t_1}z^{u_1},\ y^{t_1+t_3} - z^{u_2}x^{s_2},\ z^{u_1+u_2} - x^{s_3}y^{t_3}) = I_2\begin{pmatrix} x^{s_2} & y^{t_3} & z^{u_1} \\ y^{t_1} & z^{u_2} & x^{s_3} \end{pmatrix}$$ となる

（但し．$s_2, s_3, t_1, t_3, u_1, u_2 \in \mathbb{N}$．　by Herzog）

以下．$\mu(P) = 3$ の場合を考える．

$P^{(n)} := P^n S_P \cap S$．　nth symbolic power of P

$$S \subset R_s(P) := \bigoplus_{n \geq 0} P^{(n)} t^n \subseteq S[t]$$

部分環

symbolic Rees ring

問　$R_s(P)$ は ネーター環か？（$\Leftrightarrow$ S上 有限型の環か？）

（$R_s'(P) := R_s(P)[t^{-1}]$ は．Proj S を点 $V_+(P)$ で blow-up した射影多様体 Y の Cox 環になる）

（永田予想．r, d, m は自然数で，$m \geq 10$，$d \leq \sqrt{m}\,r$ とする．
$\Rightarrow$ $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ の一般的な m点を，それぞれ r重以上で通る d次曲線はない）

Prop. $f \in [P^{(r_1)}]_{d_1}$, $g \in [P^{(r_2)}]_{d_2}$ $(r_1, r_2 > 0)$ とする

f, g が S-正則列 $\Longrightarrow \dfrac{d_1}{r_1} \cdot \dfrac{d_2}{r_2} \geq abc$

(∵) $f, g, {}^{\exists}h$ が S の homog. s.o.p. とする.

$S/(f,g,h)$ の Poincaré series $\dfrac{(1-t^{d_1})(1-t^{d_2})(1-t^{\deg h})}{(1-t^a)(1-t^b)(1-t^c)}$ に $t=1$ を代入.

$$\frac{d_1 d_2 \cdot \deg h}{abc} = \ell_S\left(S/(f,g,h)\right) = e\left((h), S/(f,g)\right)$$

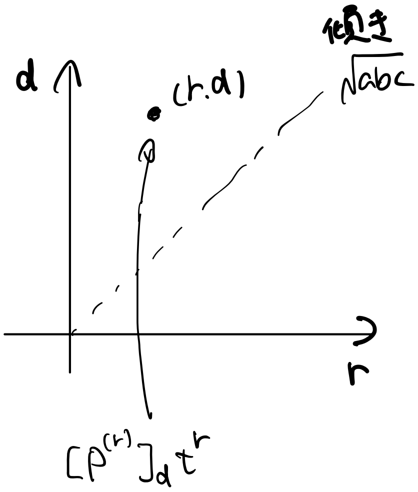
$$\underset{\text{加法公式}}{\geq} \underbrace{\ell_{S_p}\left(S_p/(f,g)S_p\right)}_{\geq\, r_1 r_2} \cdot \underbrace{e\left((h), S/p\right)}_{=\, \deg h} \geq r_1 r_2 \cdot \deg h \quad //$$

f^*, g^* は $G(S_p)$ の sop?

Huneke の判定法

$R_s(p)$ がネーター環 $\Longleftrightarrow$ 上の式が $=$ になる斉次な S-正則列 f, g が存在.

$[P^{(r)}]_d t^r$ を degree (r,d) 次とみて. $R_s(p)$ は $\mathbb{Z}^2$-graded ring とみる



もし $[P^{(r)}]_d \neq 0$ for ${}^{\exists}(r,d)$ with $\dfrac{d}{r} < \sqrt{abc}$

$$\Downarrow$$

${}^{\exists}r_1 > 0$, ${}^{\exists}d_1 > 0$, ${}^{\exists}f \in [P^{(r_1)}]_{d_1}$ s.t. $\dfrac{d_1}{r_1} < \sqrt{abc}$

キヤク

この $f \in [P^{(r_1)}]_{d_1}$ を negative curve (NC) という.

もし

NC が存在しない a, b, c がある $\Longrightarrow$ $n = abc$ で永田予想が正しい

Known Facts

- Cutkosky
  - $R_s(P)$ がネーター $\Longrightarrow$ $\exists$ NC （Huneke の判定法の片方は、NCの中になる。）
  - ch $k > 0$ なら、逆も成立

  （有限体上 of finite type なデデキント整域のイデアル類群は、有限群 （類体論））

- $a = 1, 2, 3, 4, 6$

$$\Downarrow$$

$$-K_Y : \text{big} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, r, d > 0 \ \text{s.t.} \begin{cases} [P^{(r)}]_d \neq 0 \\ \dfrac{d}{r} < a+b+c \end{cases}$$

Cutkosky $\Downarrow$

$R_s(P)$ はネーター

$a = 6$ で、P は c.i. でないとする

すると、$b \equiv 1 \mod 6$, $c \equiv -1 \mod 6$ としてよい

$\exists\, s > 0$ s.t. $yz - x^s \in P$

$$\frac{b+c}{1} < a+b+c$$

- $a = 5, 8$

$$\Downarrow$$

P の生成元の一つが NC のとき、$R_s(P)$ はネーター

$\begin{cases} a = 5 & \text{海老名} \\ a = 8 & \text{内澤} \end{cases}$

- ch $k = 0$ とする。

$(a, b, c) = (7, 15, 26), (9, 13, 29), (10, 11, 27), (11, 21, 25),$
$(12, 13, 17), (13, 18, 25), \cdots\cdots, (25, 29, 72), \cdots\cdots$

Goto-Nishida-Watanabe

$\Longrightarrow$ P の生成元の一つが NC で、$R_s(P)$ は non-Noether

内澤. $a = 7, \cancel{8}, 9, 10, 11, \cdots, 100$ のとき、そのような例がある (use computer) ?

- $ch=0$, Pの生成元の一つがNCのとき.

$\xRightarrow[\text{KN, IK}]{}$ $R_s(P)$のネーター性は、とても簡明に判定できる

- Gonzalés-Gonzalés-Karu

$\forall r>0$, $P^{(r)}$からNCがとれてネーターでない例が存在. ($ch=0$)

($r=2$, KN)

$$\boxed{\text{Th } (5,103,169) \text{ は、} ch=0 \text{ で non-Noeth.}}$$

問
- $a=8$で non-Noeth の例はあるか?
- $a=7,\cancel{8},9,10,11,\cdots$ のとき, いつも Pの生成元の一つがNCで non-Noeth の例があるか?

Thの証明の流れ

(Step 1) $\exists f \in [P^{(7)}]_{2065}$ NC $\left(\begin{array}{l}\forall k, \\ \text{但し } ch(k)=0\end{array}\right)$. 手計算でチェックできる.

(Step 2) もし $ch=0$ で $R_s(P)$がネーターなら Hunekeの判定法のもう一つの元は $[P^{(59)}]_{17407}$ からとれることを示す. コンピューター不要. 数学

(Step 3) $ch=2$のとき, $[P^{(59)}]_{17407}=0$ を示す

$$\left(\begin{array}{c} \Downarrow \\ ch=0 \text{ でも } [P^{(59)}]_{17407}=0 \\ \Downarrow \text{Step2} \\ ch=0 \text{ で、} R_s(P) \text{ は non-Noeth.} \end{array}\right)$$

コンピュータを用いる (今回、なんとか手計算でチェックした.)

$17407=103\times169$

どうやってこの例をみつけたか.

(1) コンピュータを用いて、$a=5$, $b, c \leq 200$ をすべて計算した.

- $(5, 37, 61)$ 等は, $r \leq 30$ では NC なし
- $\exists$NC のとき, → ほとんど, ネーター or 判定できない (コンピューターでは)
- 唯一(?) できたのが $(5, 103, 169)$

(2) コンピュータを用いて,

$ch=0$, $(5, 103, 169)$ のとき $[P^{(59)}]_{17407}=0$ がわかった.

(2-1) $ch=0$ で, $[P^{(r)}]_d$ の次元を求めるプログラム

→ 約25分で $[P^{(59)}]_{17407}=0$ がわかった.

(2-2) 別のプログラムを用いる

(Pの3つの生成元は d-列
そのことと局所コホモロジーを用いて
$[P^{(59)}]_{17407}$ の次元を計算)

→ 約20秒で $ch=2$ で $[P^{(59)}]_{17407}=0$ がわかった.

(1ヶ月, これを手計算でやろうとがんばったが,
全く歯が立たず)

(2-3) 初心に返って, 後藤セミナーの方法で
$ch=2$ で $P, P^{(2)}, P^{(3)}, \cdots, P^{(59)}$ の生成元を, コンピュータを用いて
すべて求めた. (2, 3日)

約3週間かかって, 手計算でチェックした.

$\boxed{ch=2 \text{ のとき}, P^{(59)} \text{ の生成元の degree の最小値は } 17410}$

(Step 3) char $k = 2$ で、$(\overset{x}{5}, \overset{y}{103}, \overset{z}{169})$ の $P^{(n)}$ の生成元を求めたい。$(n \leq 59)$

$P = P^{(1)}, P^{(2)}, \cdots, P^{(n-1)}$ がわかったとする。

$I := P\cdot P^{(n-1)} + P^{(2)}\cdot P^{(n-2)} + \cdots + P^{(n-1)}\cdot P \subset P^{(n)}$ 新たにつけ加える元を求めたい

$I + xS = (L, x)S$ をみたす $k[y,z]$ のモノミアルイデアル L をとる。

すると、$\ell(k[y,z]/L) = \ell(S/I+xS) \geq \ell_S(S/P^{(n)}+xS) = \ell_{S_P}(S_P/P^nS_P)\cdot e((x), S/P)$

$= \dfrac{n(n+1)}{2}\cdot 5$

Case 1 もし $(=)$ $\Rightarrow I + xS = P^{(n)} + xS \Rightarrow P^{(n)} = I$.

Case 2 もし $(>)$ なら、(新しく $P^{(n)}$ の元を加えて、I を大きくとり直す)

$g_1, \cdots, g_t$: y, z, x に対する grevlex での I のグレブナー基底

$\tilde{g}_i$: g_i を x で割れるだけ割った式

Fact : $\tilde{g}_1, \cdots, \tilde{g}_t$ は、$I : \langle x \rangle$ のグレブナー基底

$I : \langle x \rangle = P^{(n)}$

$k[y,z] \supset (in(\tilde{g}_1), \cdots, in(\tilde{g}_t)) \supset L$

I のグレブナー基底を求める作業により新しい生成元を見つけて、colength をへらして case 1 にもちこむ。

(資料1の赤字は S-多項式) $P^{(n)} = P^n : \langle x \rangle$ なので、P^n のグレブナー基底がわかれば、$P^{(n)}$ はわかる。

手計算でのチェック

- mod x^D で計算すれば十分。
- $\mathbb{F}_2[\overset{5}{x}, \overset{103}{y}, \overset{169}{z}]_d \longrightarrow \mathbb{F}_2[x]$ この射は、$d < 103\cdot 169$ なら単射

  $y \longmapsto 1$

  $z \longmapsto 1$ $\mathbb{F}_2[x]$ で計算すれば十分。

$(x^{a_1} + x^{a_2} + \cdots + x^{a_m})(x^{b_1} + \cdots + x^{b_m})$

$= \cdots\cdots$

	b_1	b_2	$\cdots$	b_m
a_1	a_1+b_1			
a_2				
$\vdots$				
a_m				

← 同じものが2つあったら削除。

(Step 2) $\overset{x}{5}, \overset{y}{103}, \overset{z}{169}$), $P = I_2\begin{pmatrix} x^{28} & y & z \\ y^2 & z & x^{47} \end{pmatrix}$

$\exists f \in [P^{(7)}]_{2065}$ NC (by Step 1)

$2065 = 5 \cdot 7 \cdot 59$

$$\frac{5\cdot 7\cdot 59}{7} \cdot \frac{103\cdot 169}{59} = 5\cdot 103\cdot 169$$

Th. $\mathrm{ch}\, k = 0$, $k = \bar{k}$, a, b, c : pairwise coprime

(仮) $\exists f \in [P^{(r_1)}]_{d_1}$: NC

$d_2, r_2 \in \mathbb{N}$ は、
$$\begin{cases} \cdot\ \dfrac{d_1}{r_1} \cdot \dfrac{d_2}{r_2} = abc \\ \cdot\ f \in (y, z)S \Rightarrow a \mid d_2 \\ \cdot\ f \in (x, z)S \Rightarrow b \mid d_2 \\ \cdot\ f \in (x, y)S \Rightarrow c \mid d_2 \end{cases}$$
をみたすとする。

(仮) (0) $R_s(P)$ はネーター

(1) $[P^{(r_1-1)}]_{d_1-a-b-c} = 0$.

(2) $\exists w > 0$ s.t. $\begin{cases} r_2 - w r_1 \geq -1 \\ H^2_m(P^{(r_2 - w r_1)})_{d_2 - w d_1} = 0 \end{cases}$ $\quad m = (x, y, z)S$

$\Longrightarrow$ Huneke の判定法をみたす もう一つの元は、

$[P^{(r_2)}]_{d_2}$ からとれる。

(1) は、$r_1 = 1$ なら、成立

(2) は、$r_1 = 1$ or 2 なら、これをみたす w がとれる。

($r_1 = 1$ なら (1)、(2) 不要 KN)

$V_+(f)$ の proper transf を C とする (C は Y の曲線で、$C^2 < 0$)

(1) $\Longleftrightarrow C \simeq \mathbb{P}^1_k$

(2) $\Longleftrightarrow \exists w > 0$ s.t. $H^1(\mathcal{O}_Y(d_2 H - r_2 E - w C)) = 0$

Th の証明 1

ch = 0 だけで考える.

$D = d_2 H - r_2 E$ とし, 完全列 $0 \to \mathcal{O}_Y(D - wC) \to \mathcal{O}_Y(D) \to \mathcal{O}_Y(D)|_{wC} \to 0$

を考える.

$$\begin{array}{ccccc} H^0(\mathcal{O}_Y(D)) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}_Y(D)|_{wC}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_Y(D-wC)) \\ \| & & \downarrow & & \| \; (2) \\ [P^{(r_2)}]_{d_2} & & H^0(\mathcal{O}_C) & & 0 \\ & & \| & & \\ & & k & & \end{array}$$

(1) を用いながら $\mathcal{O}_Y(D)|_{wC} \simeq \mathcal{O}_{wC}$ を示す

Th の証明 2

ch k = p >> 0 のときに.

$[P^{(r_2)}]_{d_2}$ から もう一つの元がとれることを示す.

(それができれば. ch = 0 で Th が成立)

まず. (1) を用いて、 p >> 0, e >> 0 のとき、
ch k = p > 0 で. もう一つの元が $[P^{(p^e r_2)}]_{p^e d_2}$ からとれることを示す.

次に、さらに (2) を用いて. p >> 0, のとき、
ch k = p > 0 で. もう一つの元が $[P^{(r_2)}]_{d_2}$ からとれることを示す.

Rem $f \in P^{(k)}$, $g \in P^{(\ell)}$ が Huneke の判定法をみたすとする。

GNS (JMSJ) Prop 3.4 $P^{(k+\ell-1)} \subset (f, g)$, $P^{(k+\ell-2)} \not\subset (f, g)$

Lem 3.5 $n \leq k + \ell \Rightarrow (f, g) \cap P^{(n)} = f P^{(n-k)} + g P^{(n-\ell)}$

よって、 $n = k+\ell-1$ or $k+\ell$ のとき
$P^{(n)} = f P^{(n-k)} + g P^{(n-\ell)}$] これが GNW で使われた.

$n \geq k, l$ のとき.

$$0 \to S/fP^{(n-k)} \cap gP^{(n-l)} \to S/fP^{(n-k)} \oplus S/gP^{(n-l)} \to S/fP^{(n-k)} + gP^{(n-l)} \to 0$$

$$\begin{array}{c} \| \\ S/fgP^{(n-k-l)} \end{array} \quad (\text{ただし、} m<0 \Rightarrow P^{(m)} = S)$$

$$0 \to fS/fP^{(n-k)} \to S/fP^{(n-k)} \to S/fS \to 0 \quad \text{ex.}$$

$$\begin{array}{c} \cong \\ S/P^{(n-k)} \end{array} \qquad \therefore\ H^0_m(S/fP^{(n-k)}) = 0$$

よって

$$0 \to H^0_m(S/fP^{(n-k)} + gP^{(n-l)}) \to H^1_m(S/fgP^{(n-k-l)})$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ P^{(n)}/fP^{(n-k)} + gP^{(n-l)} & & H^1_m(fgS/fgP^{(n-k-l)}) \\ & & \| \\ & & H^1_m(S/P^{(n-k-l)})(-\deg f - \deg g) \end{array}$$

$\boxed{\text{もし、} n \geq k+l-1 \text{ なら}}$

($\because$ $fP^{(n-k)} + gP^{(n-l)}$ の P-準素成分が $P^{(n)}$ (局所化して考える))

◎ 実際に使うのは、

$$\boxed{\begin{array}{ll} f \in [P^{(\overset{k}{\underline{wr_1}})}]_{wd_1}, & g \in [P^{(\overset{l}{\underline{mr_2}})}]_{md_2}. \\ n = (m+1)r_2, & d = (m+1)d_2 \end{array}}$$ のケース

このとき、

$$\left[P^{((m+1)r_2)} / fP^{((m+1)r_2 - wr_1)} + gP^{(r_2)} \right]_{(m+1)d_2} \hookrightarrow H^1_m(S/P^{(r_2 - wr_1)})_{d_2 - wd_1}$$

$$\begin{array}{c} \| \\ 0 \end{array} \qquad\qquad 0 = H^2_m(P^{(r_2 - wr_1)})_{d_2 - wd_1}$$

例1
ch=0

$(8, 15, 43)$, $NC \in [\mathbb{P}^{(9)}]_{645}$ $(645 = 15\times 43)$

$$\frac{15\times 43}{9}\cdot\frac{(8\times 9)^{d_2}}{1_{\,r_2}} = 8\cdot 15\cdot 43$$

- もう一つの元は、$[\mathbb{P}^{(1)}]_{72}$ から出てない.
- 〃 $[\mathbb{P}^{(2)}]_{144}$ から出る.

この例では、$H^1(\theta_C) = [\mathbb{P}^{(8)}]_{645-8-15-43} = \Bbbk$ より、$NC \not\simeq \mathbb{P}^1$

例2
ch=0

$(5, 133, 199)$, $NC \in [\mathbb{P}^{(11)}]_{3990}$ $(3990 = 5\times 133\times 6)$

$$\frac{5\times 133\times 6}{11}\cdot\frac{(11\times 199)^{d_2}}{6_{\,r_2}} = 5\times 133\times 199$$

- もう一つの元は、$[\mathbb{P}^{(6)}]_{11\cdot 199}$ や $[\mathbb{P}^{(12)}]_{2\cdot 11\cdot 199}$ から出てない.
- 〃 $[\mathbb{P}^{(18)}]_{3\cdot 11\cdot 199}$ から出る.

この例では、$H^1(\theta_C) = [\mathbb{P}^{(10)}]_{3990-5-133-199} = \Bbbk$ より、$NC \not\simeq \mathbb{P}^1$

例3
ch=0

$(5, 7, 11)$, $NC \in [\mathbb{P}^{(4)}]_{77}$

$$\frac{7\times 11}{4}\cdot\frac{(5\times 4)^{d_2}}{1_{\,r_2}} = 5\times 7\times 11$$

- もう一つの元は、$[\mathbb{P}^{(1)}]_{20}$ から出てない.
- 〃 $[\mathbb{P}^{(2)}]_{40}$ から出る.

この例では、$H^1(\theta_C) = [\mathbb{P}^{(3)}]_{77-5-7-11} = 0$ より、$NC \simeq \mathbb{P}^1$

$$\forall\, w>0 \ \text{s.t.}\ H^1(Y, \theta_Y(d_2H - r_2E - wC)) \neq 0$$

問 ・ $a=8$ で non-Noeth の例はあるか？

・ $a=7,\cancel{8},9,10,11,\cdots$ のとき、いつも
P の生成元の一つが NC で non-Noeth の例があるか？

問 NC が存在しない a, b, c があるか？

(NC が存在しない a, b, c がある $\Longrightarrow$ $n=abc$ で永田予想が正しい)

($(9,10,13) \xrightarrow[ch=0]{}$ $r\leq 100$ では NC は存在しない。)

問 NC が $r=2$ のケースで、ネーター性の簡単な判定法はないか？
($r=1$ なら、KN, IK でできる。)

問 $I_2\begin{pmatrix} x^{s_2} & y^{t_3} & z^{u_1} \\ y^{t_3} & z^{u_2} & x^{s_3} \end{pmatrix}$ が素イデアルでないケースへの拡張。

CM 性等

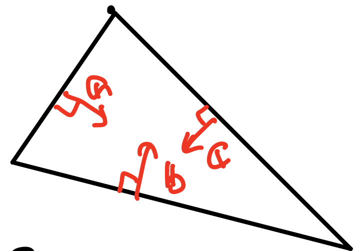
問 NC C が rational curve でない例はあるか？

問 $(a,b,c) \neq (1,1,1)$ 以外に、
$\dfrac{d}{r}=\sqrt{abc}$ をみたすキヤク元 $f\in[P^{(r)}]_d$ が
存在する例はあるか？

SMP

拡張 → 素イデアルでないケース

拡張 → 格子三角形から定まる toric variety の一点 blow-up



最短の整数ベクトル

SMP $\Longleftrightarrow$ $z^{\mathbb{a}} + z^{\mathbb{b}} + z^{\mathbb{c}} = z^{2}$