基本情報技術 I

4. 確率と統計

菊池浩明

講義目標

- 教科書
  - 1-3 応用数学
    - » 1. 確率
    - » 2. 確率分布
    - » 3. 回帰直線

宿題

- 1章練習問題
  - 11 (期待値)
  - 12 (正規分布)
  - 15 (赤玉）
  - 17 （最短経路）

1. 確率

- 組み合わせ
  - n個の要素からr個の要素を取り出す場合の数.

$$ {}_nC_r = {}_nP_r/r! = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} $$

  - 例)8人から3人を選ぶ組み合わせの数

$$ \binom{8}{3} = $$

積事象

- 独立事象
  - 事象Aと事象Bが独立に生じる.
  - 例）2個のさいころ共に偶数となる確率.
    $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 1/4$
    A=1個目が偶数，B=2個目が偶数
- 従属事象
  - A(1回目に赤）の生起がB（2回目に赤）の結果に影響を受ける.
  - 例）白3個，赤5個の壺から2個の玉を取る.
    A =1個目が赤， $P(A) = 5/8$
    B =2個目が赤， $P(B|A)$ = Aによる条件付き確率 = 4/7
    $P(A \cap B)$ = P(2個とも赤) $= P(A)\ P(B|A) =$
    $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|{\sim}A)P({\sim}A) = 4/7 * 5/8 + 5/7 * 3/8 =$

条件付き確率と同時確率

- 同時確率

	A	~A	計
B	20/56 P(A∩B)	15/56	5/8 P(B)
~B	15/56	6/56	3/8
計	5/8 P(A)	3/8	1.0

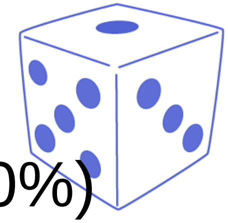
- 条件付き確率

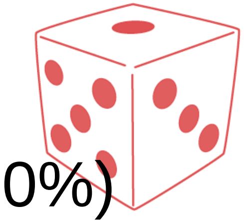
	A	~A
B	4/7 P(B|A)	5/7 P(B|~A)
~B	3/7 P(~B|A)	2/7
計	1.0	1.0

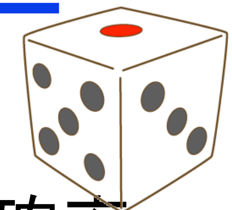
和事象，余事象

- 和事象
  - P(A∪B)=P(A)+P(B)-P(A∩B)
  - 例）2個のどちらかが赤となる確率
    P(A∪B)=5/8 + 5/8 – 5/14=
- 余事象
  - 事象Aが起きない事象
  - 例）C = 2個とも白になる事象, P(C)=
  - $\bar{C}$=A∪B=少なくともどちらかが赤となる事象,
    P($\bar{C}$)=

ベイズの定理*







- 例(ほとんど出題されない?)
  - ABのサイコロでE=1の目が出る事象の確率がP(E|A) = 3/10, P(E|B)=3/5である時，Eの時Aであった確率P(A|E)を求めよ.
  - ベイズの定理

P(A|E) = P(A∩E)/P(E) = P(E|A)P(A)/P(E)
　= 3/10*1/2/(9/20) = 1/3

P(A)=P(B)=1/2

P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B)
　= (3/10+3/5)/2 = 9/20

確率に関する問題例

- (1) 赤，白，黄が3個づつ入った壷がある. 3つ出したらすべて白の確率.
- (2) AとBの文字をn個ならべて，60個以上の数を表すにはnは何個必要か？
- (3) 0と1を組み合わせてできる長さ1以上7文字以下の文字列の総数.

問題

- 算数と英語のテストで40点を取った.
ヤバイのどちらか？

	60	60
	55	45
	65	75
	70	80
	50	40
	80	90
	40	30
平均	60.00	60.00
	算数	英語

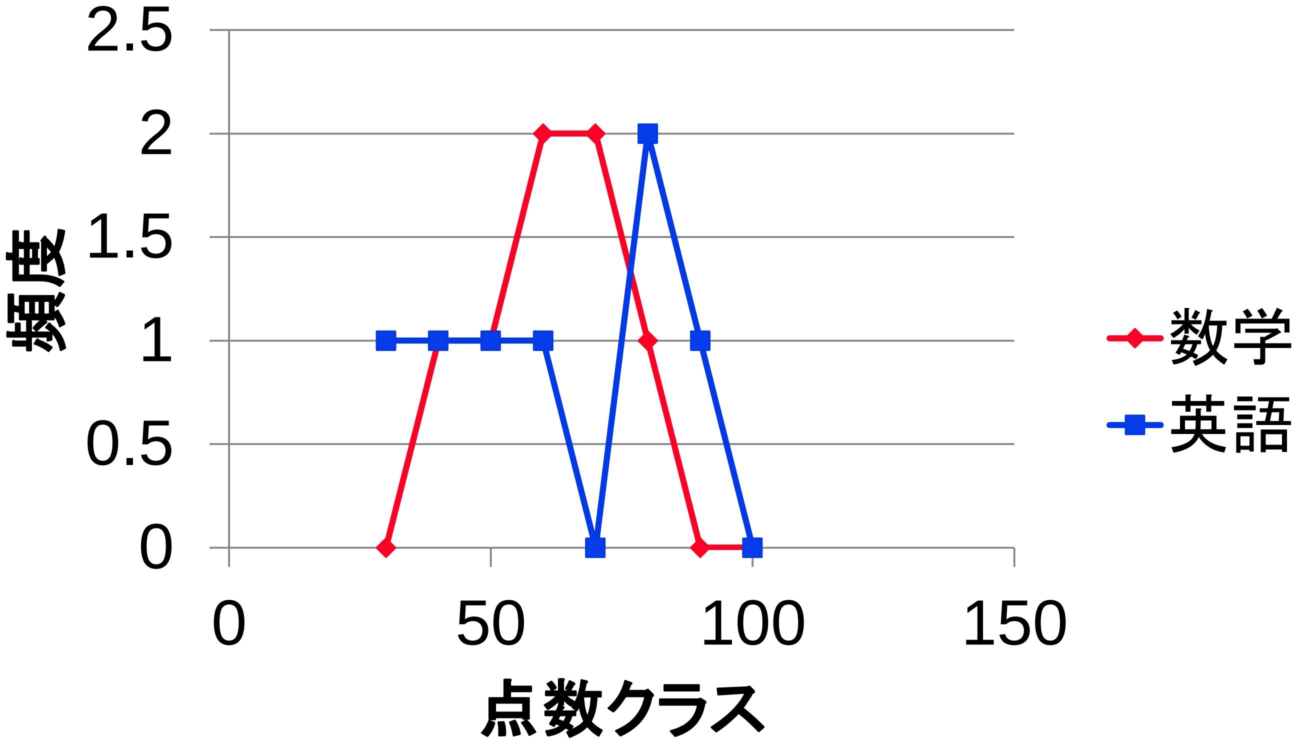
2. 確率分布

- 統計値
  - 平均 $\bar{x} = \mu = 1/n \sum x_i$
  - 分散 $\sigma^2 = 1/n \sum (x_i - \mu)^2$
  - 標準偏差　$\sigma = \sqrt{(\sigma^2)}$

	60	60
	55	45
	65	75
	70	80
	50	40
	80	90
	40	30
平均	60.00	60.00
分散	150	435.7
標準偏差	12.247	20.9

ヒストグラム

- 度数分布表
  - 確率分布: 確率=頻度/N

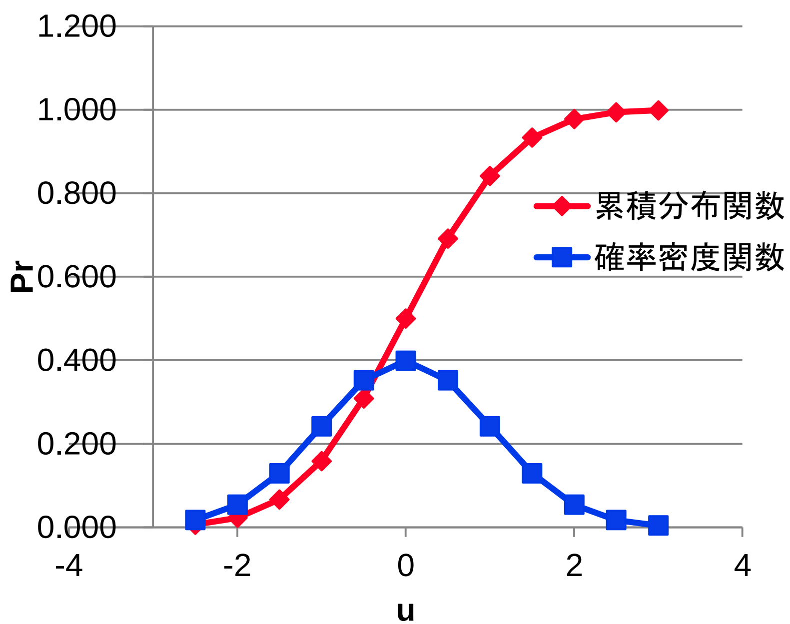


正規分布

- 定義
  - 自然現象によく観られる確率分布．密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

  - 標準正規分布
    μ=0, σ=1
    N(0, 1)



  - 累積確率分布関数
    P(X<t)

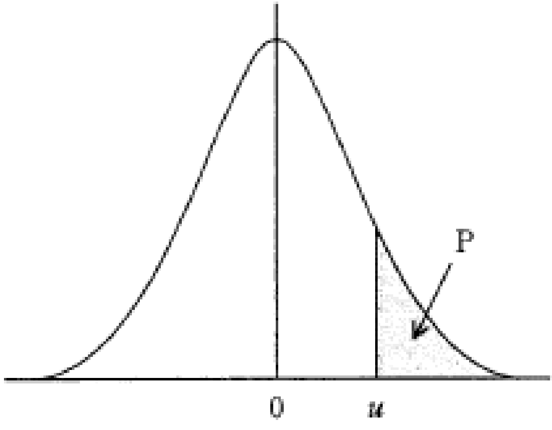
$$= \int_A f_X(x)dx$$

例題

- 平均5.2kg, 標準偏差0.1kgで分布している製品がある. 5.0kg未満が不合格品とする. その割合はいくらか？
  - ❑ $u = (x-\mu)/\sigma = (5.0 - 5.2)/0.1 = -2$ より, P(2) = 0.023 = 1−Pr(U < 2). 答 2.3 %
  - ❑ X≥5.3kgとなる製品の割合は？

標準正規分布表

u	P
0.0	0.500
0.5	0.309
1.0	0.159
1.5	0.067
2.0	0.023
2.5	0.006
3.0	0.001



参考）偏差値*

- 定義

$$T_i = \frac{10(x_i - \mu_x)}{\sigma_x} + 50$$

  - 例) 算数　μ=60, σ=12.2, x=40点の時,
    T=10(40 – 60)/12.2 = <u>33.6</u>
  - 英語 T = 10(40-60)/20.9 = <u>40.4</u>
  - （算数の方がヤバい）
- FMSの偏差値が60点である．合格するのは100人中何位までか？

3. 統計

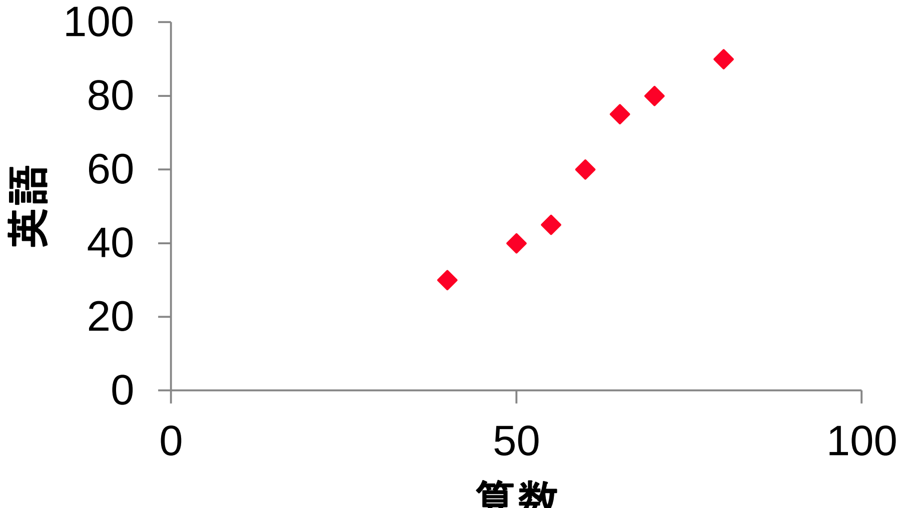
- 相関係数（ピアソンの積率相関係数）
  - ❑(x_i, y_i)の組が与えられてるとき

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} = \sum(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)/\sigma_x\,\sigma_y$$

$y_i=x_i$ の時，$r=\sum(x_i-\mu_x)^2/\sigma_x^2=1$（最大値）

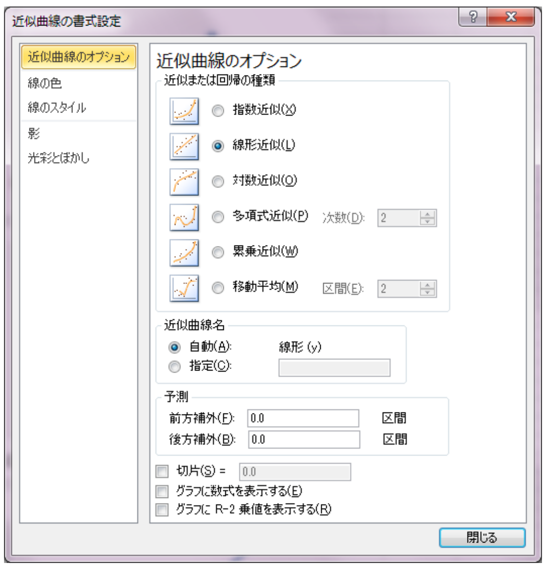
例）算数と英語の点数散布図の時，

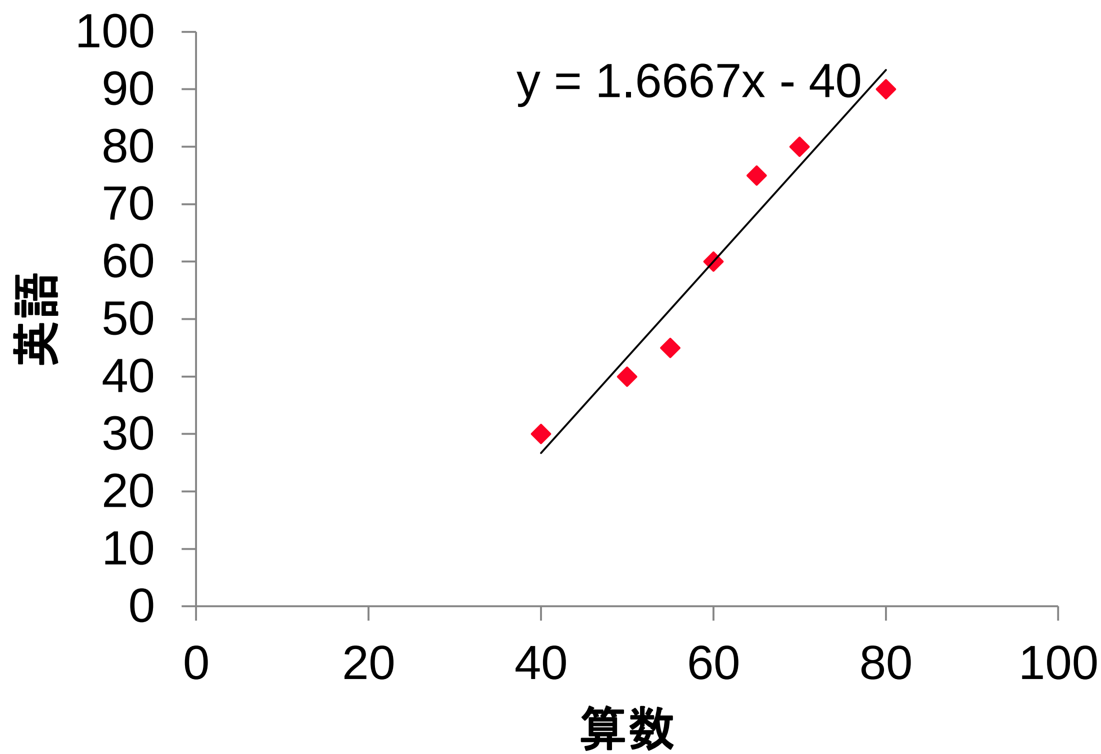
R= $\boxed{0.977897823}$



回帰直線

- 最小二乗法
  - 「近似曲線の追加」





参考）最小二乗法*

- アルゴリズム
  - 入力: $(x_1,y_1),\ldots,(x_n, y_n)$
  - あてはめ多項式: $f(x) = a+bx$
- 誤差の総和 $S = \Sigma(f(x_i) - y_i)^2$
  - $dS/da = 0$
  - $dS/db = 0$ の連立方程式を解く.

まとめ

- 二つのサイコロの様に独立して生じる事象を（　　　　），そうでないものを（　　　　　）という．P(A|B)を（　　）による（　　　　　　　）確率という．
- 標準正規確率分布とは，平均が（　　　）で（　　　　　）が1.0の正規分布である．標準偏差を二乗すると（　　　　）になる．
- 相関係数は最大値（　　　），最小値（　　　）で二つの分布の相関を表す．別名（　　　　）の積率相関係数という．