基本情報技術 I

3. 集合と論理

菊池浩明

講義目標

- 教科書
  - ❑1-2 集合と論理演算

宿題（次回小テスト範囲）

- 1章練習問題
  - 10, 13

1. 集合

- 例
  - $U = \{1, 2, \ldots, 10\}$,
    $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $C=\{4, 8\}$

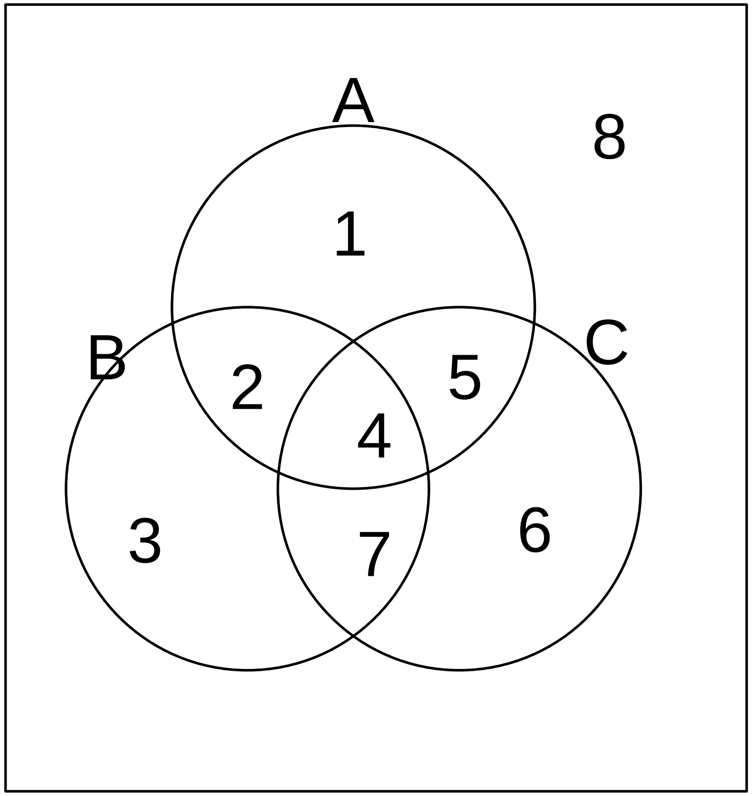
1. $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$
2. $A \cap B =$
3. $A \cap C =$
4. $\overline{A} =$
5. $U - A =$
6. $|A| =$
7. $C \subseteq A$, $A \not\subseteq B$, $2 \in A$,

その他の集合

- 直積
  - ❑ $A=\{1,2\}$, $B=\{a,b\}$
  - ❑ $A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b)\}$
  - ❑ $|A \times B| = 2x2 =$ $(=|A|x|B|)$
- べき集合
  - ❑ $2^A = \{\varphi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
  - ❑ $|2^A| =$

例1

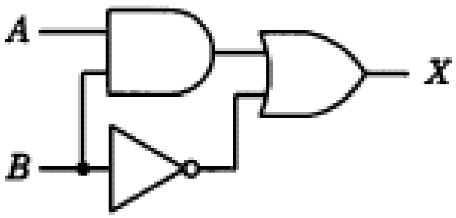
- 次の式を表す集合
  - ❑A∩B = {2, 4}
  - ❑(A∪B)∩C ={4,5,7}
  - ❑A∩B∪A =
  - ❑(A∪B)∩$\bar{C}$ =
  - ❑A∩B∩ $\bar{C}$ =

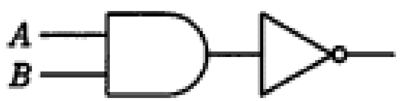


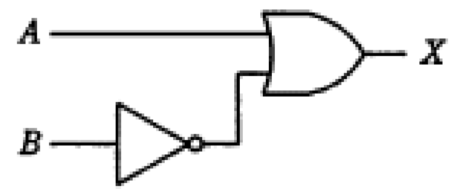
頻出★

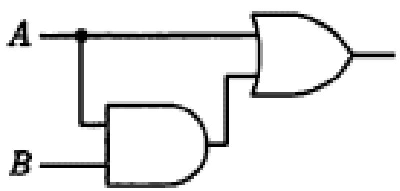
2. 論理演算 (4. 論理回路)

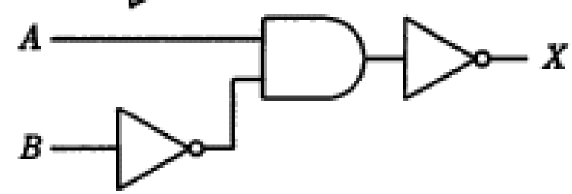
■ 次の論理回路と同じ出力が得られる回路はどれか？ (H21春)



ア


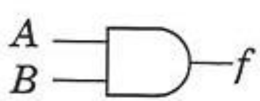
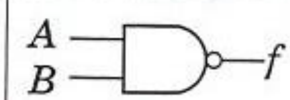
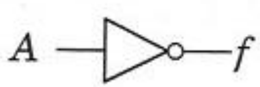
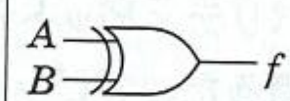
イ


ウ


エ


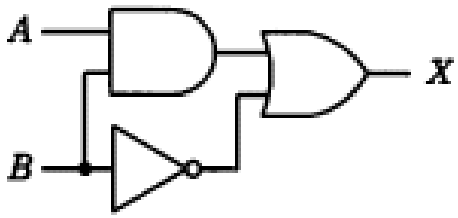
MIL規格

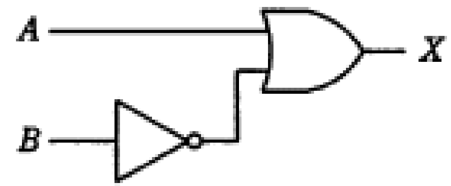
- 表1.8

回路名	回路記号	論理式	回路名	回路記号	論理式
OR		論理和 $f=A+B$	NOR		否定論理和 $f=\overline{A+B}$
AND		論理積 $f=A\cdot B$	NAND		否定論理積 $f=\overline{A\cdot B}$
NOT		否定 $f=\overline{A}$	XOR		排他的論理和 $f=\overline{A}\cdot B+A\cdot\overline{B}$

解き方1.

- 真理値表





A	B	A∧B	~B	X
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

A	B	~B	X
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

例2

- 論理式 X･~Y+~X･Yと恒等的に等しい式はどれか？

  ア (X+Y)･(~X+Y)

  イ (X+Y)･(X+~Y)

  ウ (X+Y)･(~X+~Y)

  エ (X+~Y)･(~X+Y)

X	Y	F	ア	イ	ウ	エ
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

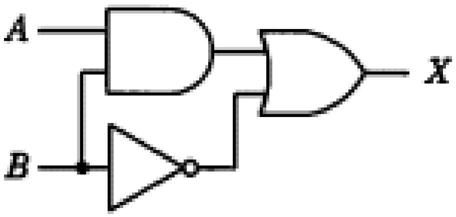
- (X+Y = X∨Y, X･Y = X∧Y, ~X = not X)
- 恒等式(tautology) Xの値に依らず常に真(1)になる式．例）X ∨ ~X

論理式の法則(代数)

- ブール代数
  - 最大元 $1 \vee A = 1$, $0 \wedge A = 0$
  - 最小元 $1 \wedge A = A$, $0 \vee A = A$
  - べき等則 $A \wedge A = A$, $A \vee A = A$
  - 交換則 $A \vee B = B \vee A$, $A \wedge B = B \wedge A$
  - 結合則 $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$,
    $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$
  - 分配則 $(A \vee B) \wedge C = A \wedge C \vee B \wedge C$,
    $(A \wedge B) \vee C = A \vee C \wedge A \vee C$
  - 吸収則 $A \vee A \wedge B = A$, $A \wedge (A \vee B) = A$
  - 二重否定 $\sim(\sim A) = A$
  - ドモルガン則 $\sim(A \vee B) = \sim A \wedge \sim B$, $\sim(A \wedge B) = \sim A \vee \sim B$
  - (第二吸収則: $A \vee \sim A \wedge B = A$)

解き方2

- 論理式
  - X = (A∧B)V~B



= (A V~B) ∧ (BV~B) 分配律

= (A V~B) ∧ (1) 排中律

= A V ~B

= イ

加法標準形

- 標準形
  - 一意に決まる形式．論理積（最小項）の論理和．例）XY ∨ ~XY ∨ ~X~Y
  - 1. ドモルガン律を展開.
  - 2. 分配律で和項を積項に.
  - 3. 相補律，吸収律で項の削除
  - (4. 単項を最小項へ）

例3

- 論理式~((A+B)・C)と等しいものはどれか？
  - ア A･B +~C,　　イ AB~C,
    ウ ~A+~B+~C,　　エ ~A~B+~C
  - ~((A+B)・C) =~(A+B) + ~C　(ドモルガン)
    =

例2 (p.29)別解

- 論理式 X･~Y+~X･Yと恒等的に等しい式はどれか？

ア (X+Y)･(~X+Y) = X~X + XY + Y~X + YY
= XY + Y~X +Y
= Y

イ (X+Y)･(X+~Y) =

ウ (X+Y)･(~X+~Y) =

エ (X+~Y)･(X+~Y) =

集合と論理（ブール代数）

- 論理式
  - 最大元 1VA = 1
  - 最小元 0ΛA = 0
  - 交換則 AVB = BVA
  - 結合則
    (AVB) VC = AV (BVC)
  - 分配則 (AVB)ΛC =
    AΛCV BΛC
  - 吸収則 AVAΛB = A
  - ドモルガン則
    ~(AVB) = ~A Λ ~B
- 集合
  - 最大元 U UA =U
  - 最小元 φ ∩A =φ
  - 交換則 AUB = BUA
  - 結合則
    (AUB) UC = AU (BUC)
  - 分配則 (AUB)ΛC =
    A∩CU B∩C
  - 吸収則 AUAΛB = A
  - ドモルガン則
    ~(AUB) = ~A ∩ ~B

3. ビット演算

- マスク
  - ❑ $X = D9_{(16)} = 11011001_{(2)}$
    $B = 0F_{(16)} = 00001111_{(2)}$
  - ❑ $X \vee B = 1101\underline{1111}_{(2)}$　（セット）
  - ❑ $X \wedge B = \underline{0000}1001_{(2)}$　（クリア）
  - ❑ $X \oplus B = 1101\underline{\mathbf{0110}}_{(2)}$　（反転）

例4

- $X = D9_{(16)} = 11011001_{(2)}$
  1. 下位7ビット　$= X \wedge 7F$
  2. Xの2の補数　$= X \oplus FF + 1$
  3. Xの符号　$= X \wedge 80$ (>>7)
  4. 16の倍数かどうか　$= X \wedge 0F$　(0なら倍数)

5. 加算回路

■ 2進数の加算

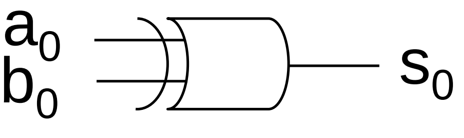
❑13+5 = 18

$$
\begin{array}{r}
1101_{(2)} \\
+\ 0101_{(2)} \\
\hline
10010_{(2)}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
c_2\ c_1\ \ \ \\
a_1\ a_0 \\
+\ b_1\ b_0 \\
\hline
s_2\ s_1\ s_0
\end{array}
$$

a	b	s	c
0	0	0	0
0	1		
1	0		
1	1		

$s_0 = a_0 \sim b_0 \vee \sim a_0 b_0 = a_0 \oplus b_0$

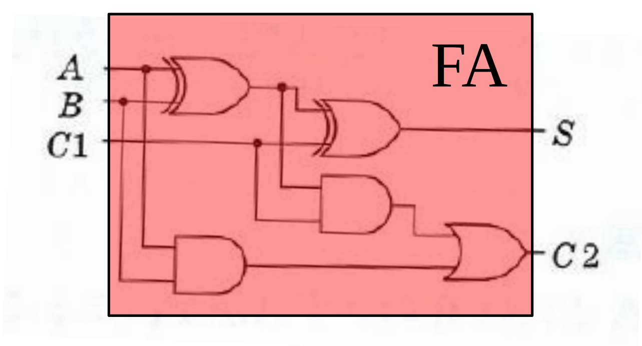
$c_1 = a_0 \wedge b_0$

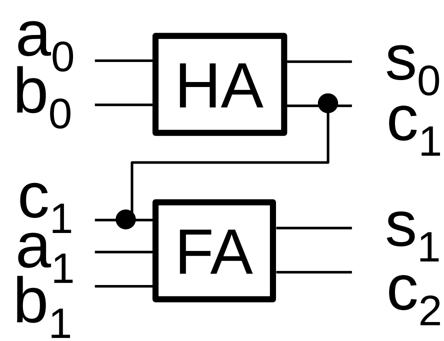


全加算器

- 半加算器 Half Adder (HA)
  - ❑ $s_0 = a_0 \sim b_0 \lor \sim a_0 b_0 = a_0 \oplus b_0$
  - ❑ $c_1 = a_0 \land b_0$
- 全加算器 Full Adder (FA)
  - ❑ $s_1 = a_1 \oplus b_1 \oplus c_1$
  - ❑ $c_2 = a_1 \land b_1 \lor a_1 \land c_1 \lor b_1 \land c_1$
    (a,b,cの内二つ以上が1の時に1になる）

$$\begin{array}{rrr} c_2 & c_1 & . \\ & a_1 & a_0 \\ \underline{+} & \underline{b_1} & \underline{b_0} \\ s_2 & s_1 & s_0 \end{array}$$

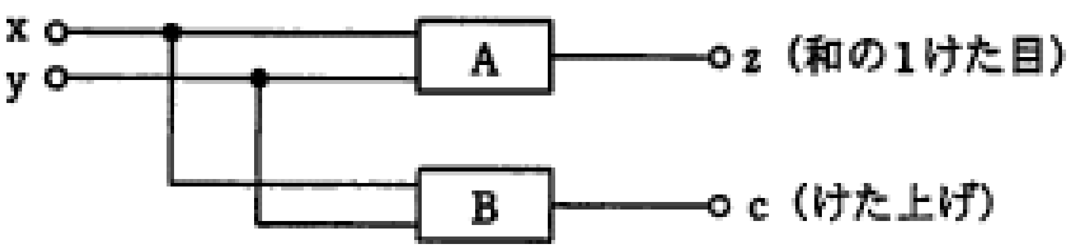




頻出★ ★

例5

- 1ケタのxとyを加算し，和zとけた上げcを出力する．（H21春）



	A	B
ア	排他的論理和	論理積
イ	否定論理積	否定論理和
ウ	否定論理和	排他的論理和
エ	論理積	論理和

まとめ

- 集合も論理式も(　　　　)代数のモデルであり，ドモルガン律などの法則を満たす．
- 論理回路が常に同一になることを(　　　)であると言い，0と1の全組み合わせの(　　　　)表で検査する．
- Xにマスク1を論理積X∧1するとLSB以外を(　　　　)し，論理和X∨1すると，(　　　　)し，排他的論理和 X ⊕ 1すると(　　　　)する．
- LSBの加算を行う回路を(　　　　)という．