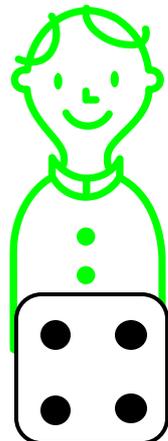
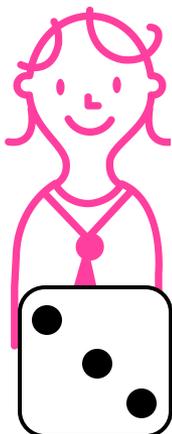


ゲームの準備



1. 6人一組でグループを作る。
同じグループの人は、なるべく近くの席に座る。
2. グループ内で、一人ずつ1番～6番まで番号を決める。
番号は、授業のゲーム内でサイコロの目に対応。



高校生のための先端数理科学見学会

テーマ3



で分子のキモチを
理解する!?

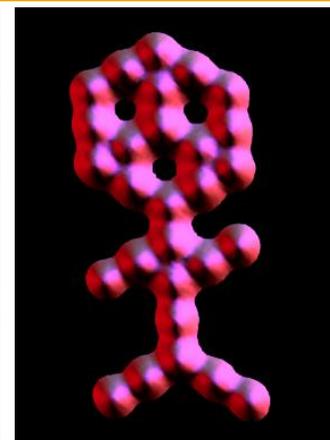
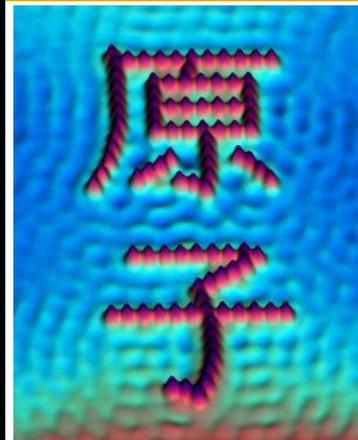
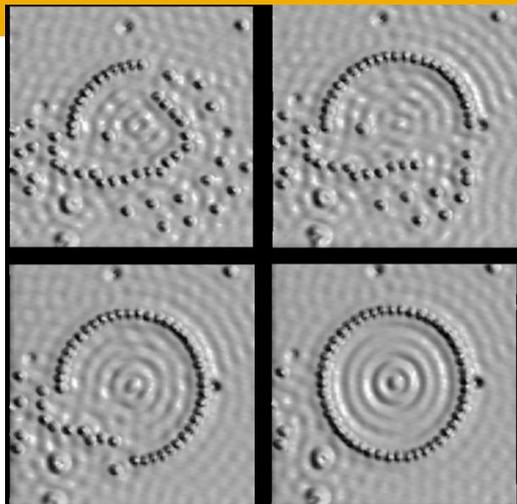
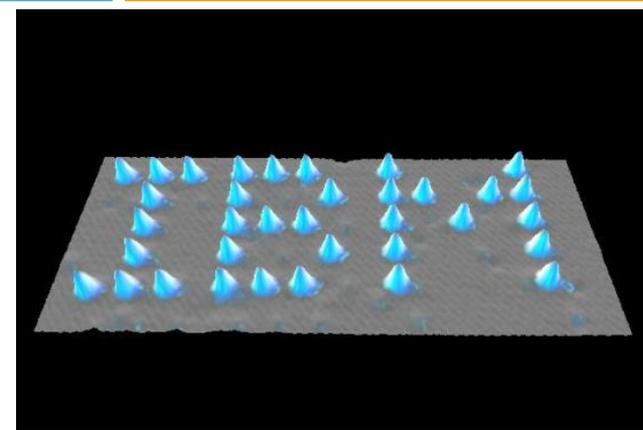
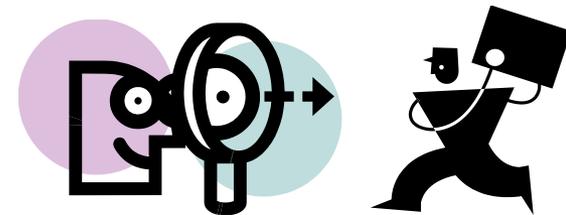
明治大学 先端数理科学インスティテュート(MIMS)

小田切 健太

小さな小さな分子の世界

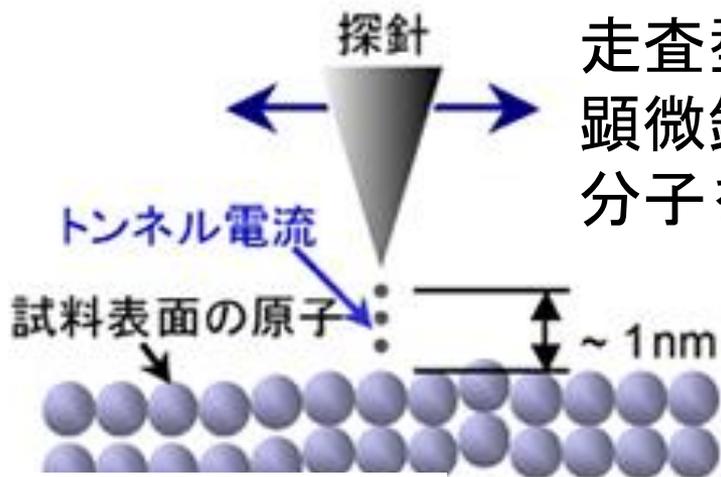


分子を見る、動かす



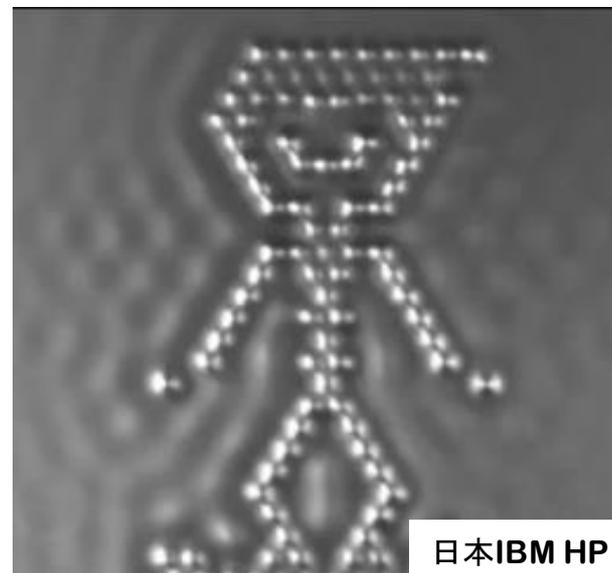
IBM Research HP より

STMの概念図



走査型トンネル
顕微鏡(STM)で、
分子を見る・動かす

東大物理 福山研究室 HP より



日本IBM HP より

熱さは激しさ！？



低い



高い

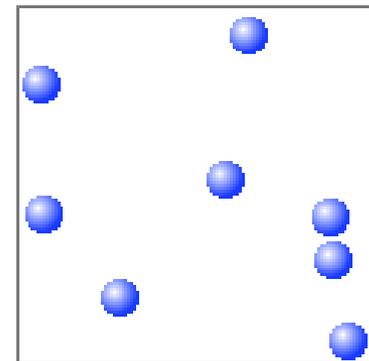
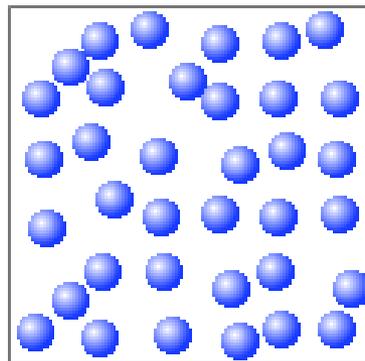
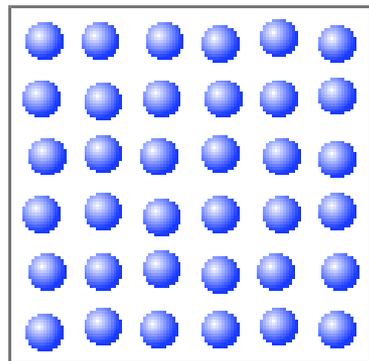
固体

液体

気体

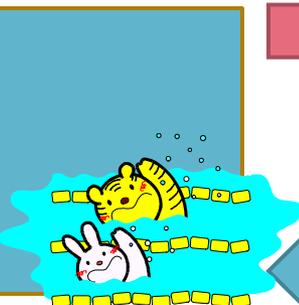
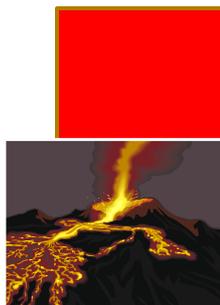
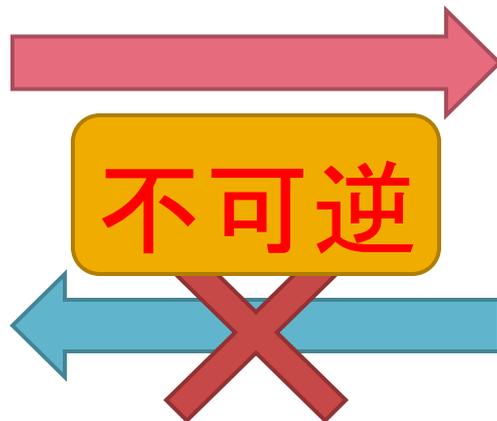
温度

分子
の
世界

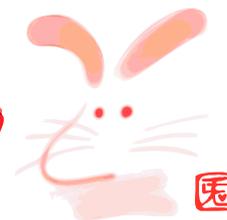


温度の高さは、分子の運動の激しさに対応

覆水盆に返らず



エントロピー増大則
(熱力学の第二法則)



ガチャガチャと確率



Q. 当たる確率が10%なら、10回やれば当たるのか？

A. 思ったよりも当たらない。

ハズレの確率 $\frac{9}{10}$ 10回ともハズレの確率 $\frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \dots \times \frac{9}{10} = \left(\frac{9}{10}\right)^{10} = 34.87\%$

1回以上当たる確率 $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10} = 65.13\%$

当たる確率	20%	5%	1%	0.5%	0.1%	0.01%
引く回数	5回	20回	100回	200回	1000回	10000回
全部ハズレ	32.77%	35.85%	36.60%	36.70%	36.77%	36.79%

ガチャガチャと確率



Q. 当たる確率が $\frac{1}{n}$ で、 n 回引き全てハズレの確率は？

$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ n を大きくすると、36.7%付近に近づいていく？

実際に n を大きくすると、

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 0.367879L = \frac{1}{e} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 2.718281L = e$$

e : ネイピア数

当たる確率	20%	5%	1%	0.5%	0.1%	0.01%
引く回数	5回	20回	100回	200回	1000回	10000回
全部ハズレ	32.77%	35.85%	36.60%	36.70%	36.77%	36.79%

ゲーム その 1



1. 1番の人から順番にサイコロ5個を同時に振る。

2. 出た目に応じて、チップを分配する。

- サイコロの目：2が1つ、3が1つ、4が2つ、6が1つ
→ チップの分配：2番と3番と6番に1枚ずつ、4番に2枚渡す



3. 6番の人まで2,3を行い、計30枚のチップを分配する。

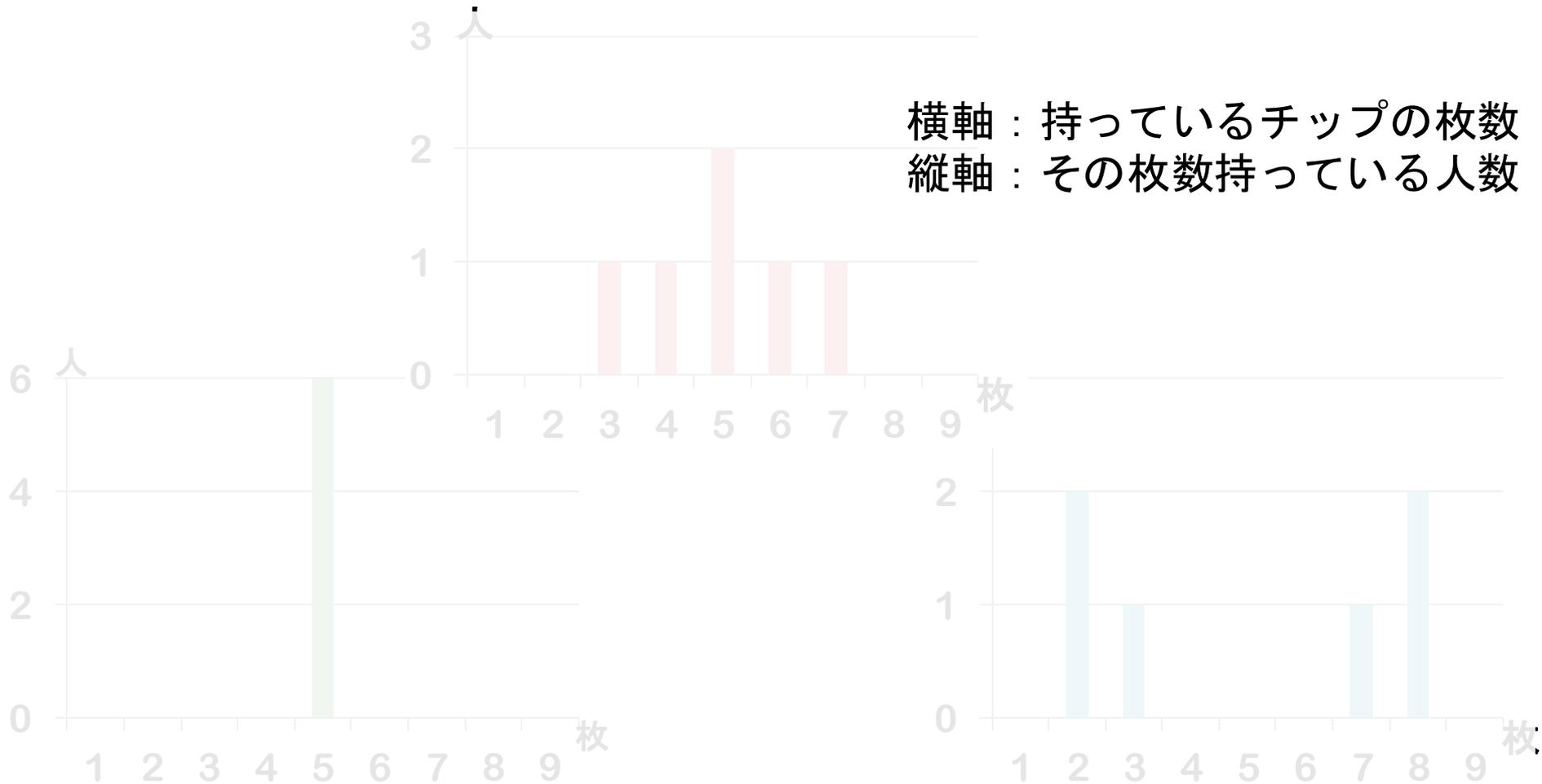
4. 各自、自分のチップの枚数を記録する。

5. グループ内で、各自が何枚チップを持っているか比べる。

チップの分配はようになる？



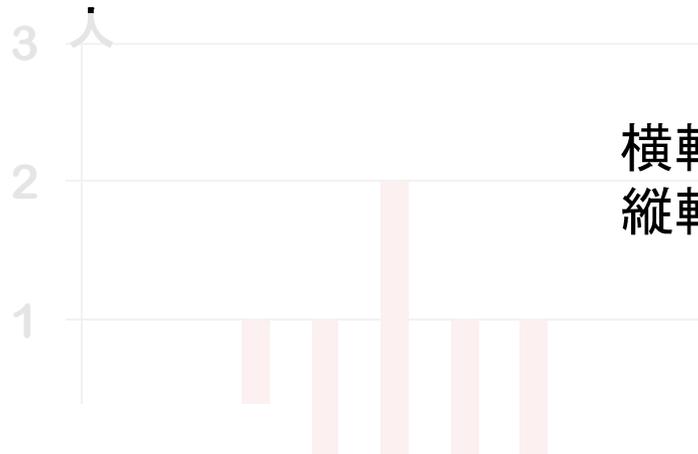
チップの分配のグラフはようになるか？



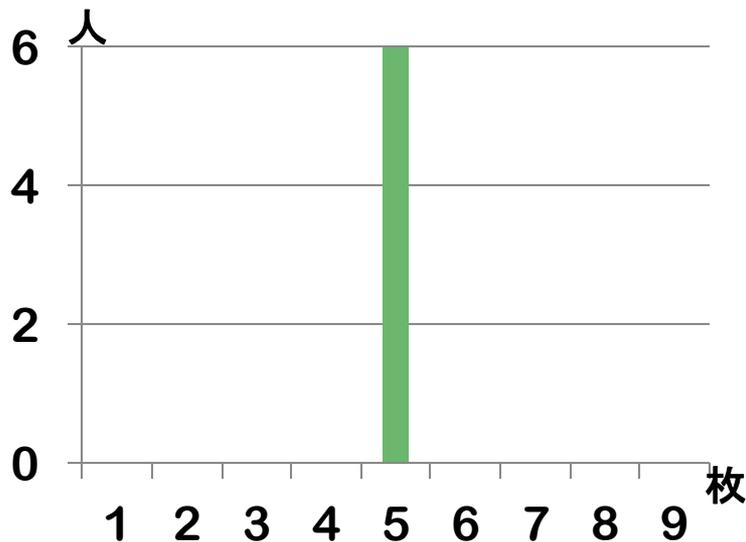
チップの分配はようになる？



チップの分配のグラフはようになるか？



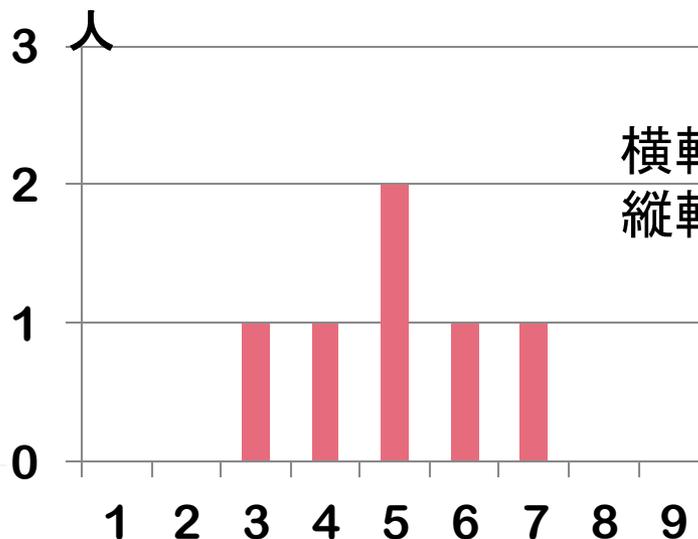
横軸：持っているチップの枚数
縦軸：その枚数持っている人数



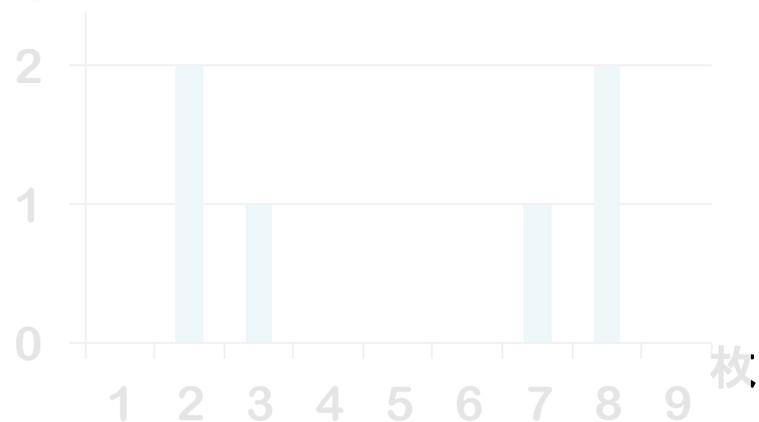
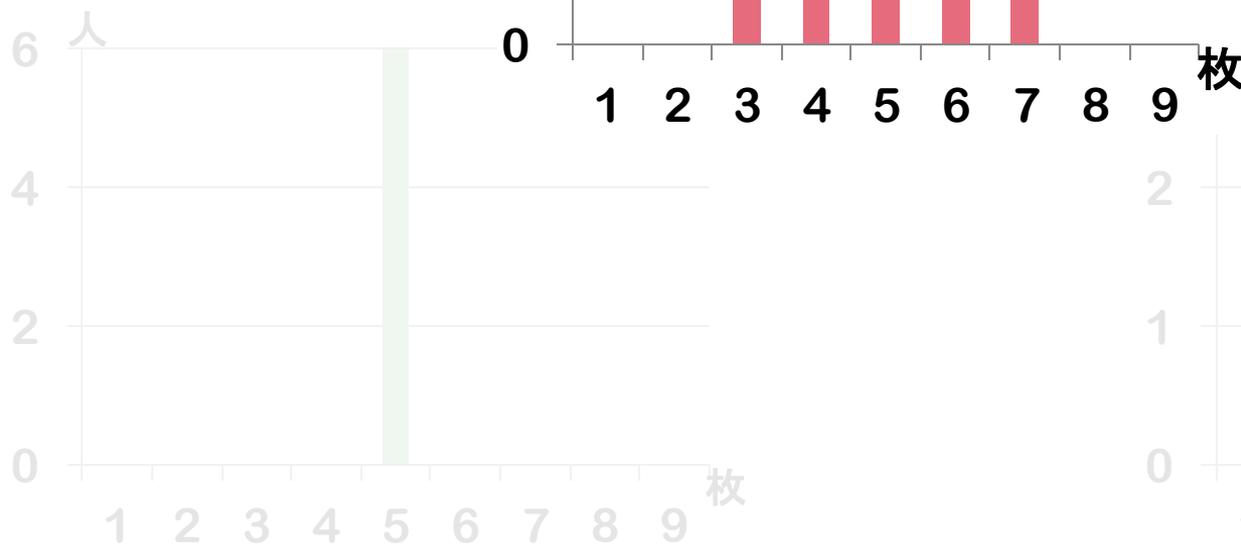
チップの分配はようになる？



チップの分配のグラフはようになるか？



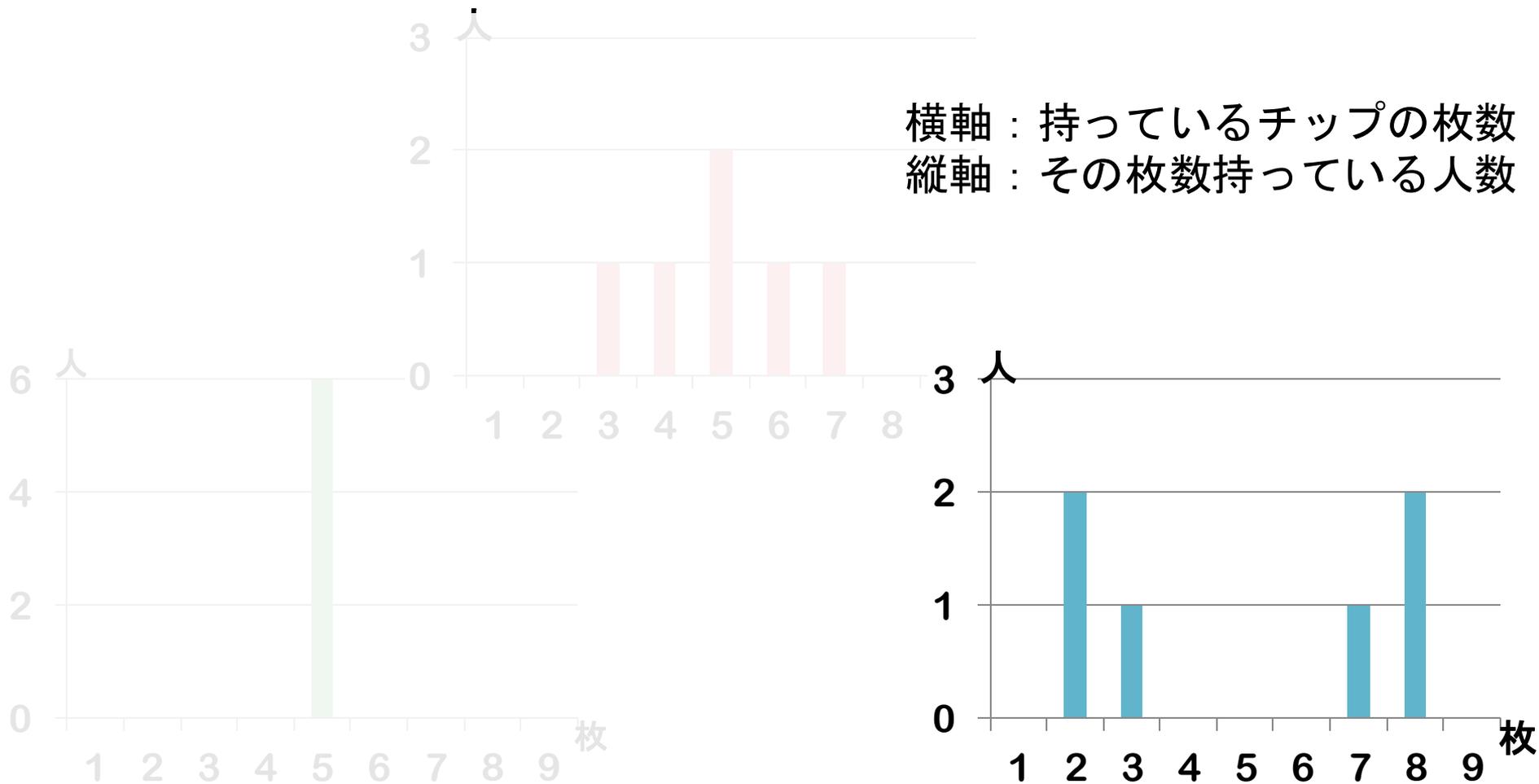
横軸：持っているチップの枚数
縦軸：その枚数持っている人数



チップの分配はようになる？



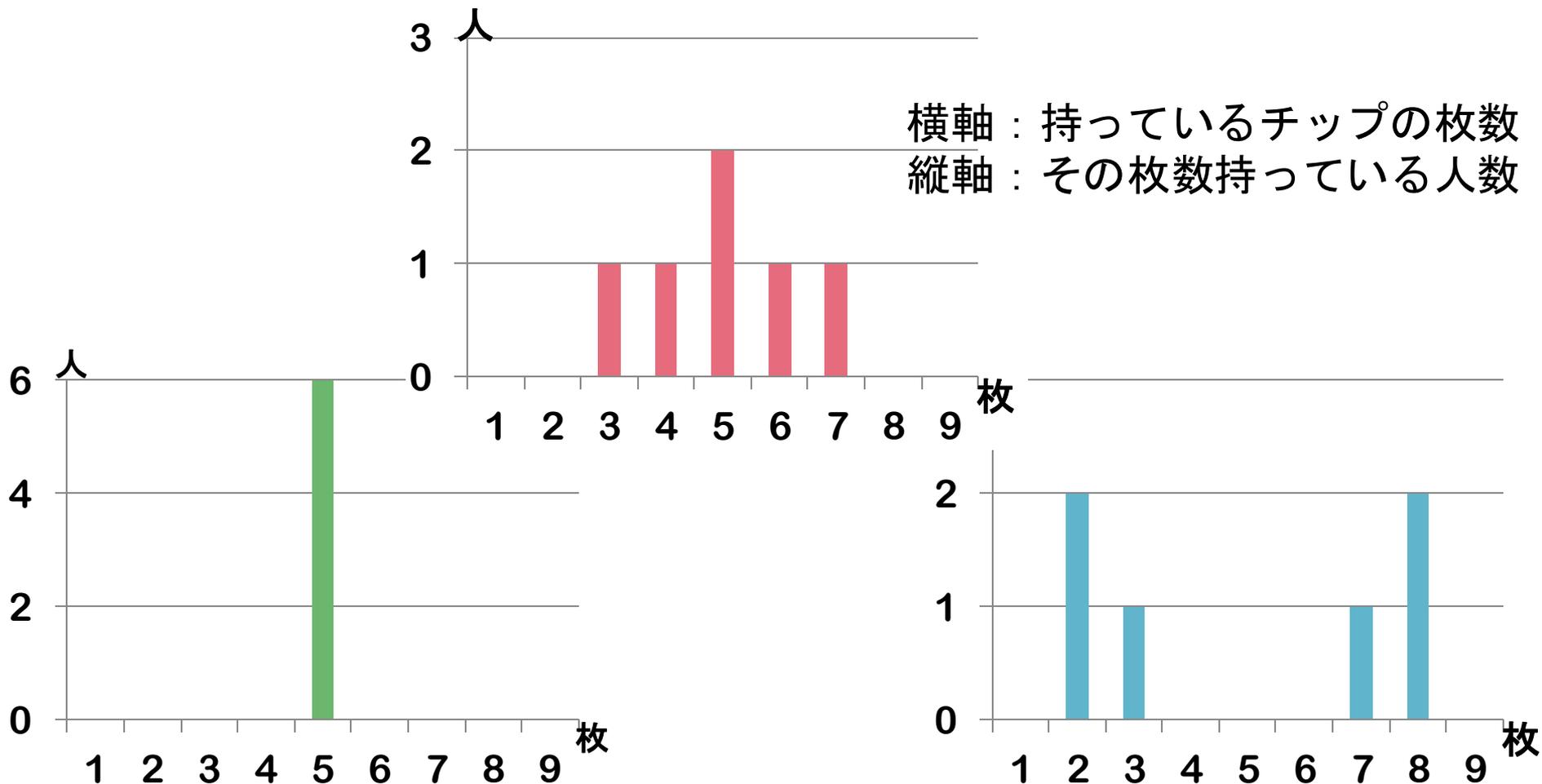
チップの分配のグラフはようになるか？



チップの分配はどうなる？



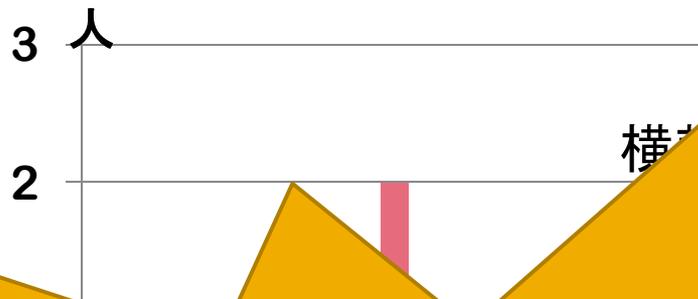
チップの分配のグラフはどうなるか？



チップの分配はどうなる？



チップの分配のグラフはどうなるか？



横軸 : 持っているチップの枚数
縦軸 : その枚数持っている人数



振ってみなけりゃ
分からない！

ゲーム その 1



1. 1番の人がサイコロ5個を同時に振る。



2. 出た目に応じて、チップを分配する。



- ・サイコロの目：2が1つ、3が1つ、4が2つ、6が1つ
- チップの分配：2番と3番と6番に1枚ずつ、4番に2枚渡す

3. 6番の人まで2, 3を行い、計30枚のチップを分配する。

4. グループ内で、各自が何枚チップを持っているか調べる。

5. チップの分配のグラフを描いてみる。

横軸：持っているチップの枚数

縦軸：その枚数持っている人数

分配のされ方を調べる

場合の数を使って、分配のされ方を調べる



サイコロを1回振る → 6通り

サイコロを2回振る → $6 \times 6 = 36$ 通り

サイコロを3回振る → $6 \times 6 \times 6 = 216$ 通り

サイコロを30回振る → $6 \times 6 \times \dots \times 6 \times 6 = 6^{30}$ 通り!

$6^{30} = 221073919720733357899776$

2210垓7391京9720兆7333億5789万9776

コピー用紙を 6^{30} 枚重ねると、光が2000年かかる距離!



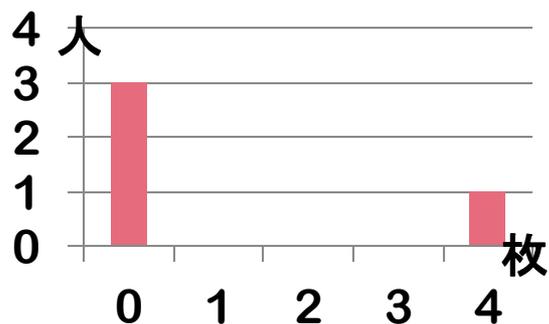
分配のされ方を調べる



4人に4枚のチップを分配する

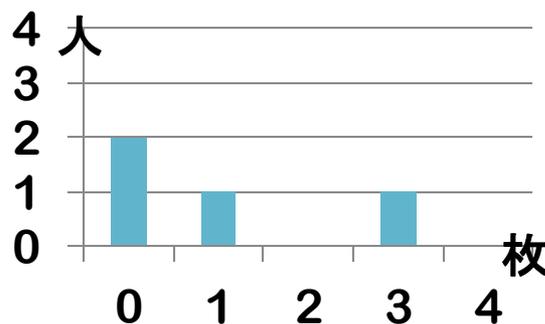


4面サイコロを4回振る → $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ 通り



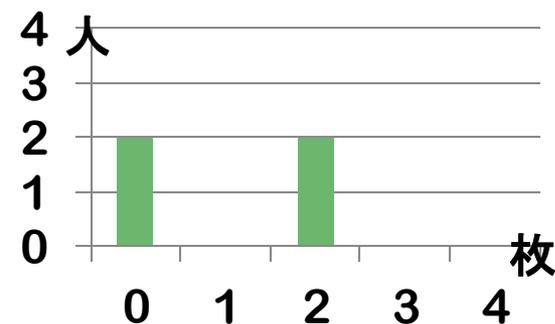
4通り

$$\frac{4}{256} = 1.56\%$$



48通り

$$\frac{48}{256} = 18.75\%$$



36通り

$$\frac{36}{256} = 14.06\%$$

分配のされ方を調べる



4人に4枚のチップを分配する

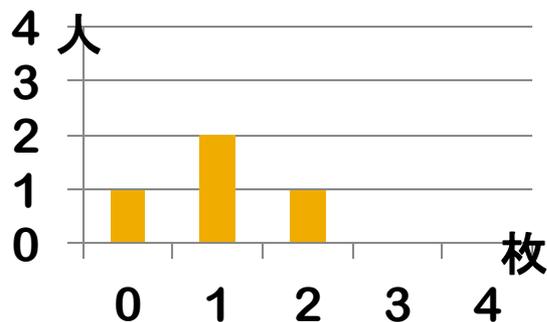


4面サイコロを4回振る → $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ 通り

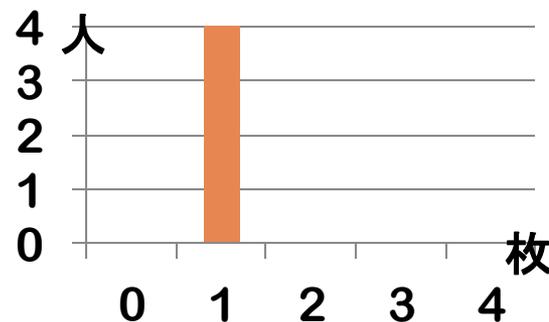
$$\frac{144}{256} = 56.25\%$$

$$\frac{24}{256} = 9.38\%$$

144通り



24通り



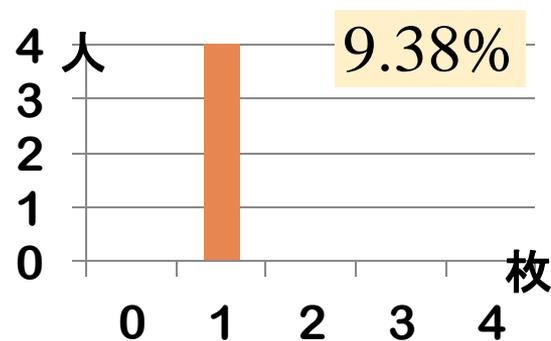
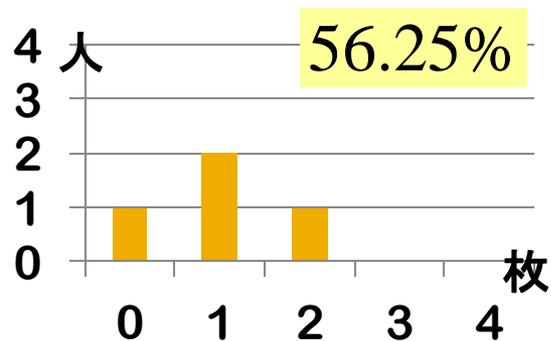
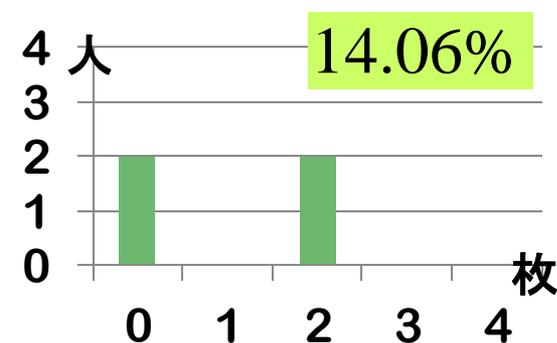
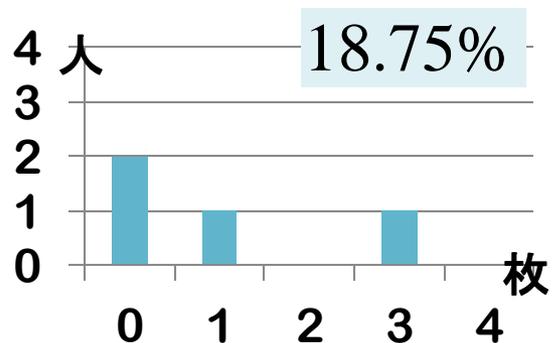
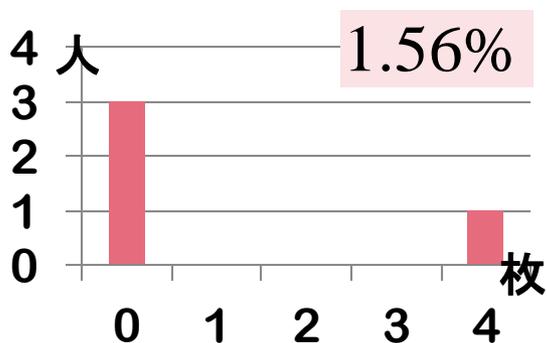
分配のされ方を調べる



4人に4枚のチップを分配する



4面サイコロを4回振る → $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ 通り



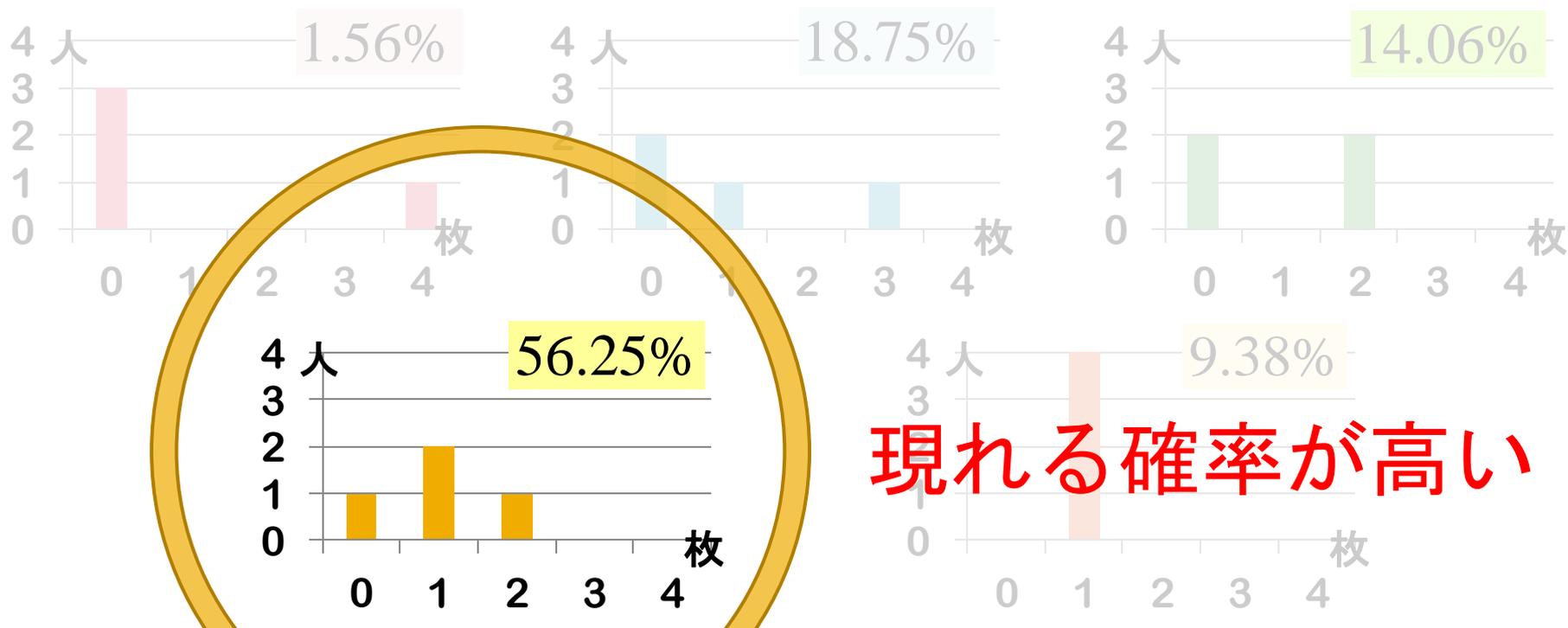
分配のされ方を調べる



4人に4枚のチップを分配する



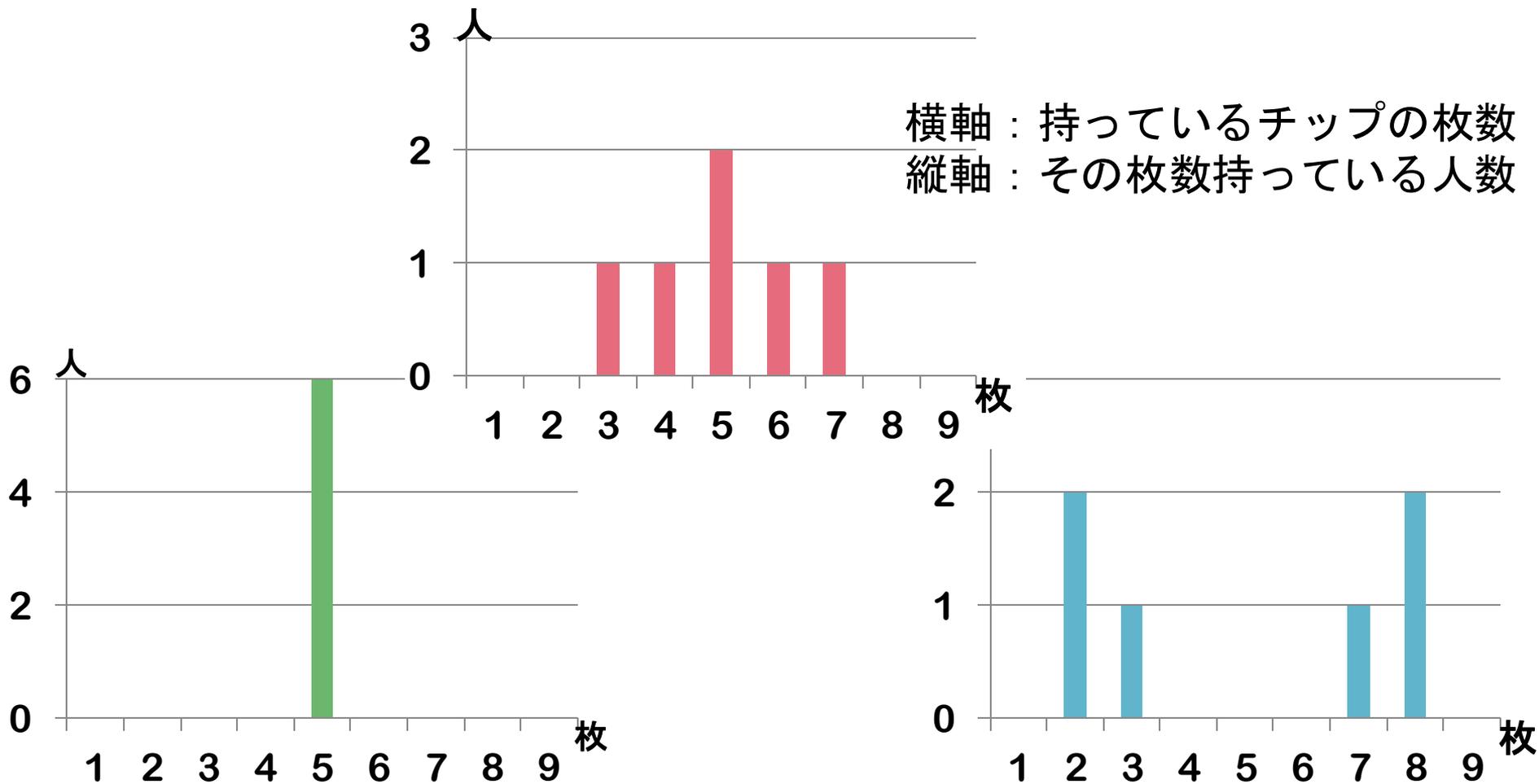
4面サイコロを4回振る → $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ 通り



チップの分配はどうなる？



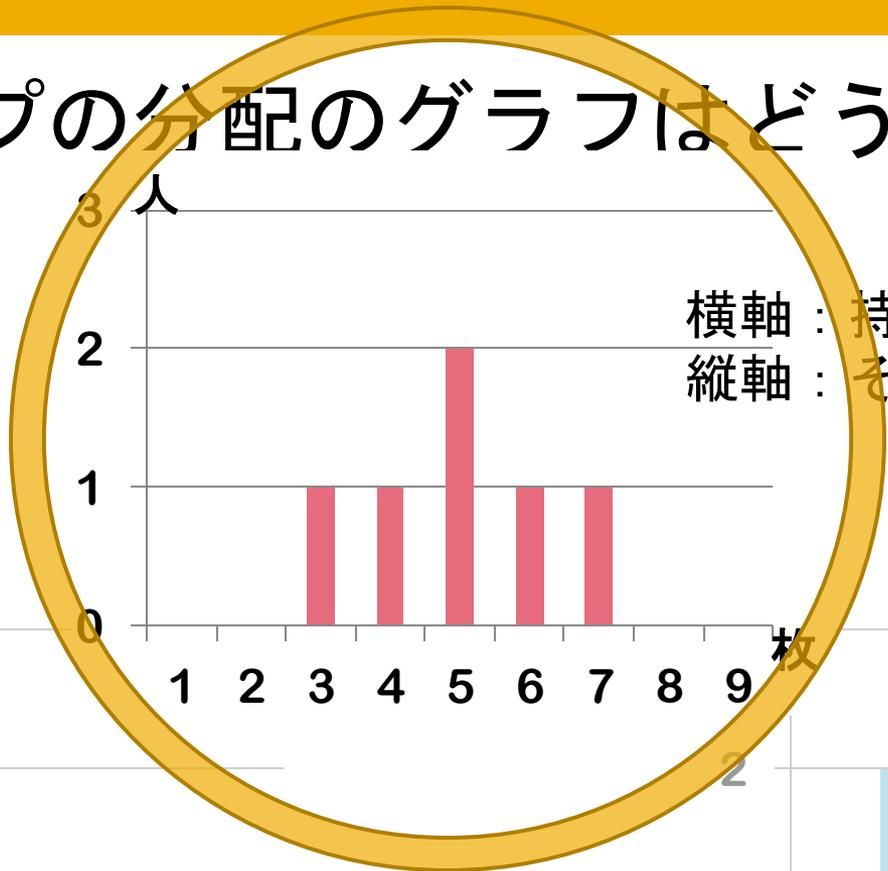
チップの分配のグラフはどうなるか？



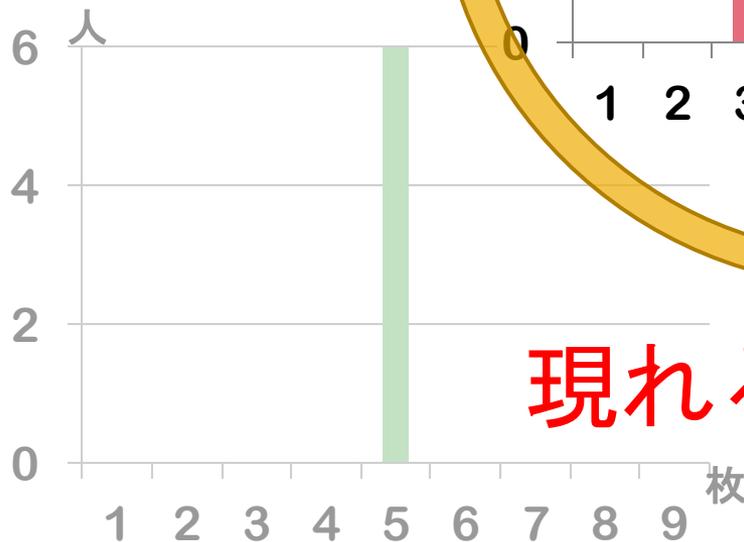
チップの分配はようになる？



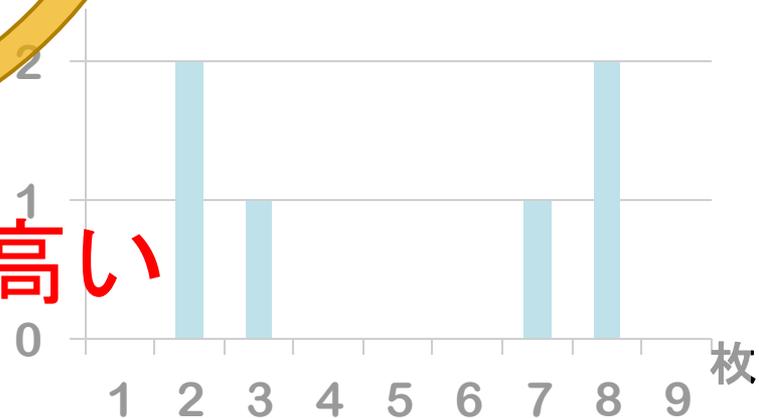
チップの分配のグラフはようになるか？



横軸：持っているチップの枚数
縦軸：その枚数持っている人数



現れる確率が高い



ゲーム その2



1. ゲームその1で分配したチップの枚数からスタート。

2. 1番が青白1つずつのサイコロを同時に振る。



3. 白いサイコロの目の番号が場にチップを出し、
青いサイコロの目の番号がそのチップをもらう。

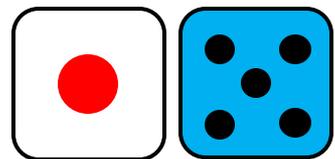
・チップを出すべき人が0枚の場合には、サイコロを振り直す。



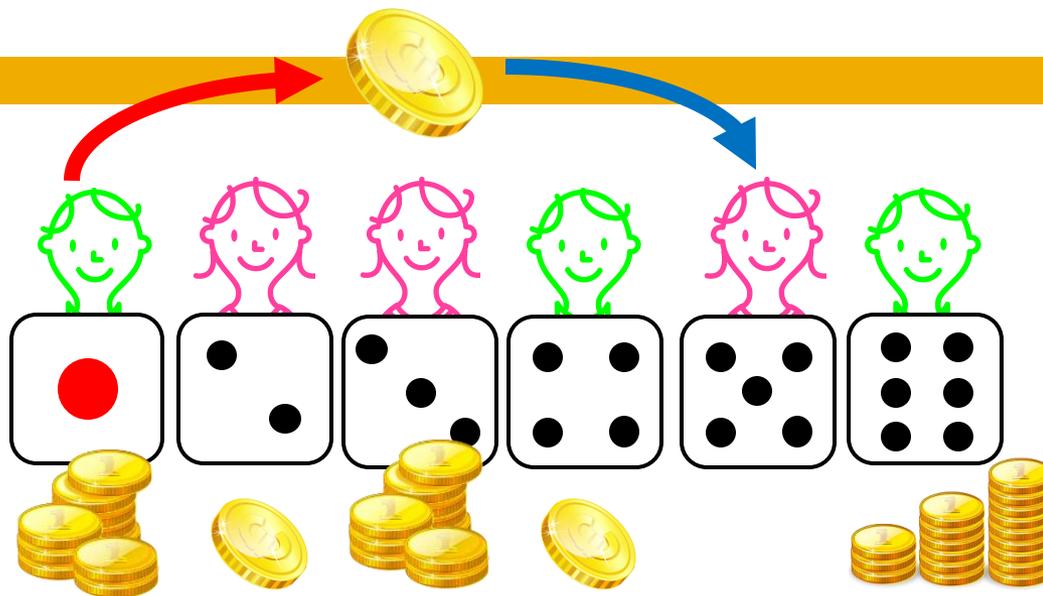
4. 2番が青白サイコロを振り、目に応じてチップを交換。
これを6番まで繰り返し、次はまた1番に戻る。

5. 終わりの合図があるまで（10分ほど）ゲームを行い、
最後に各自のチップの枚数を記録し、開始時と比較する。

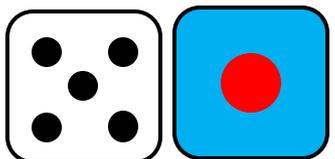
ゲーム その 2



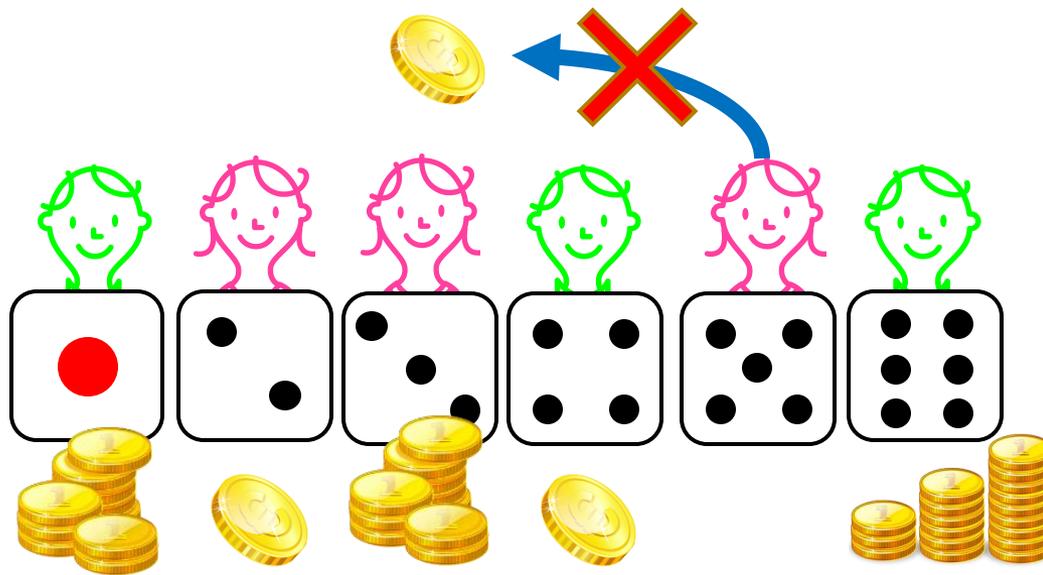
の場合



振りなおし

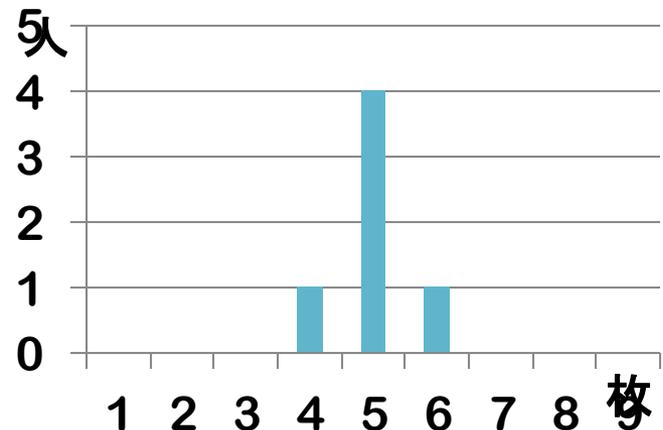
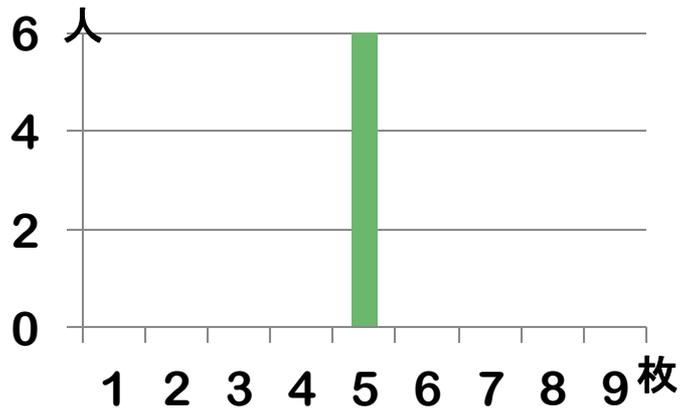
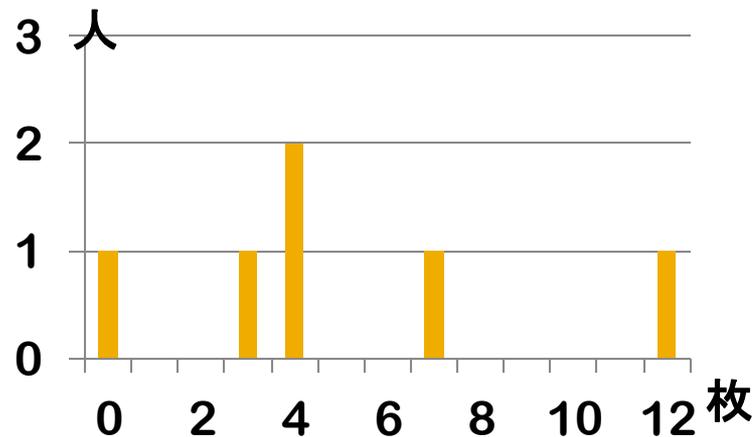
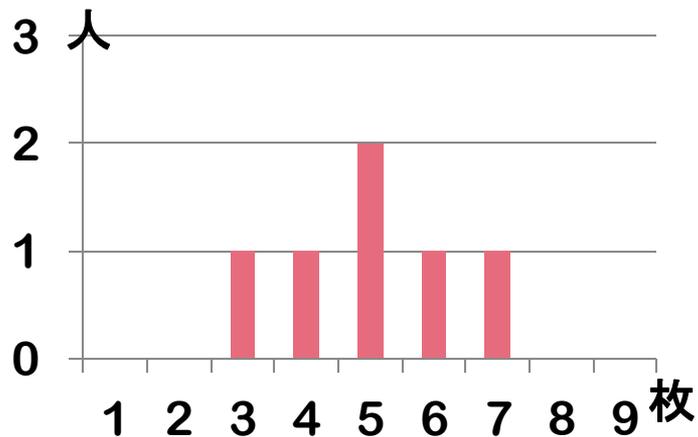


の場合

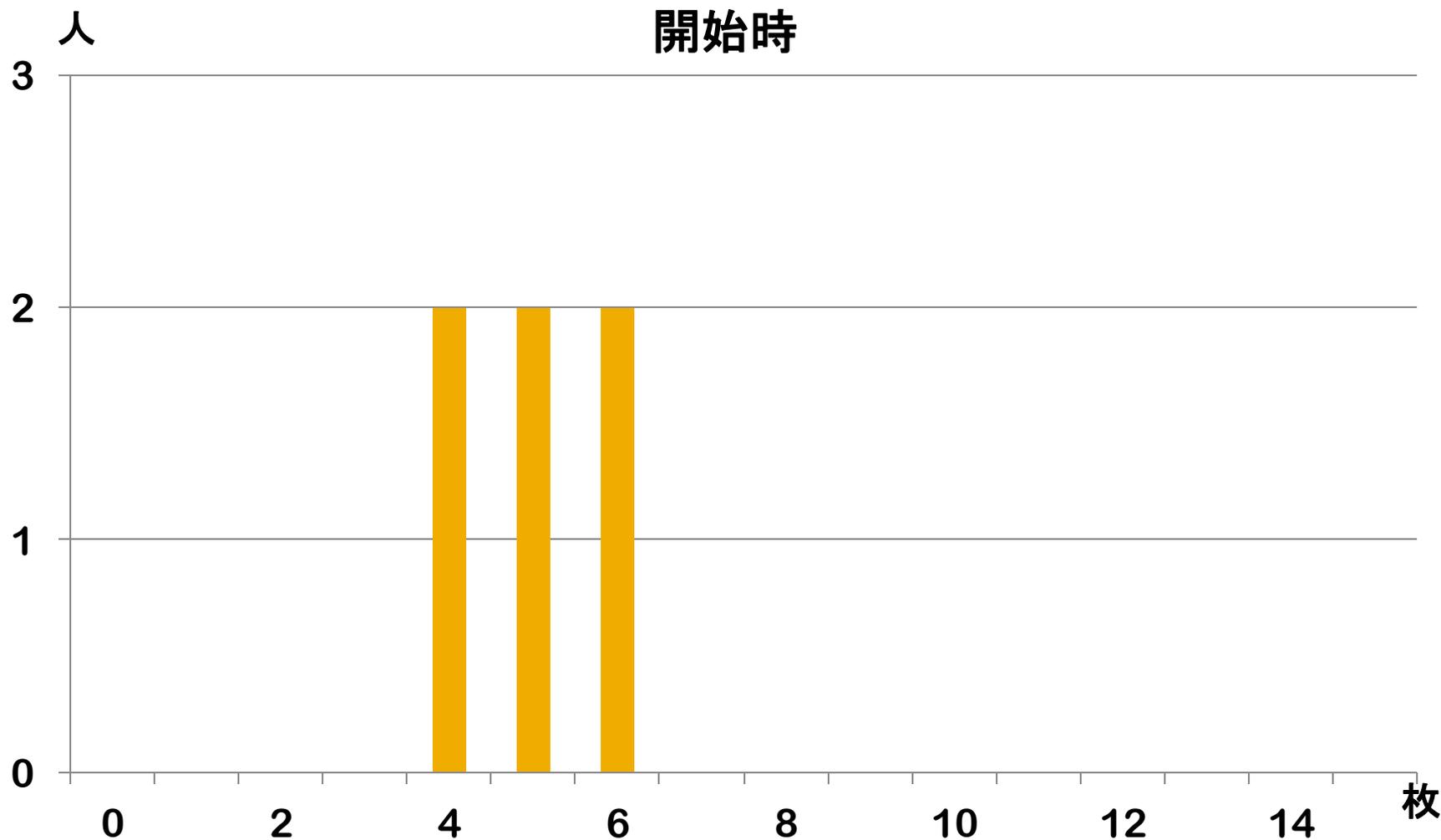


チップの分配はどうなるか？

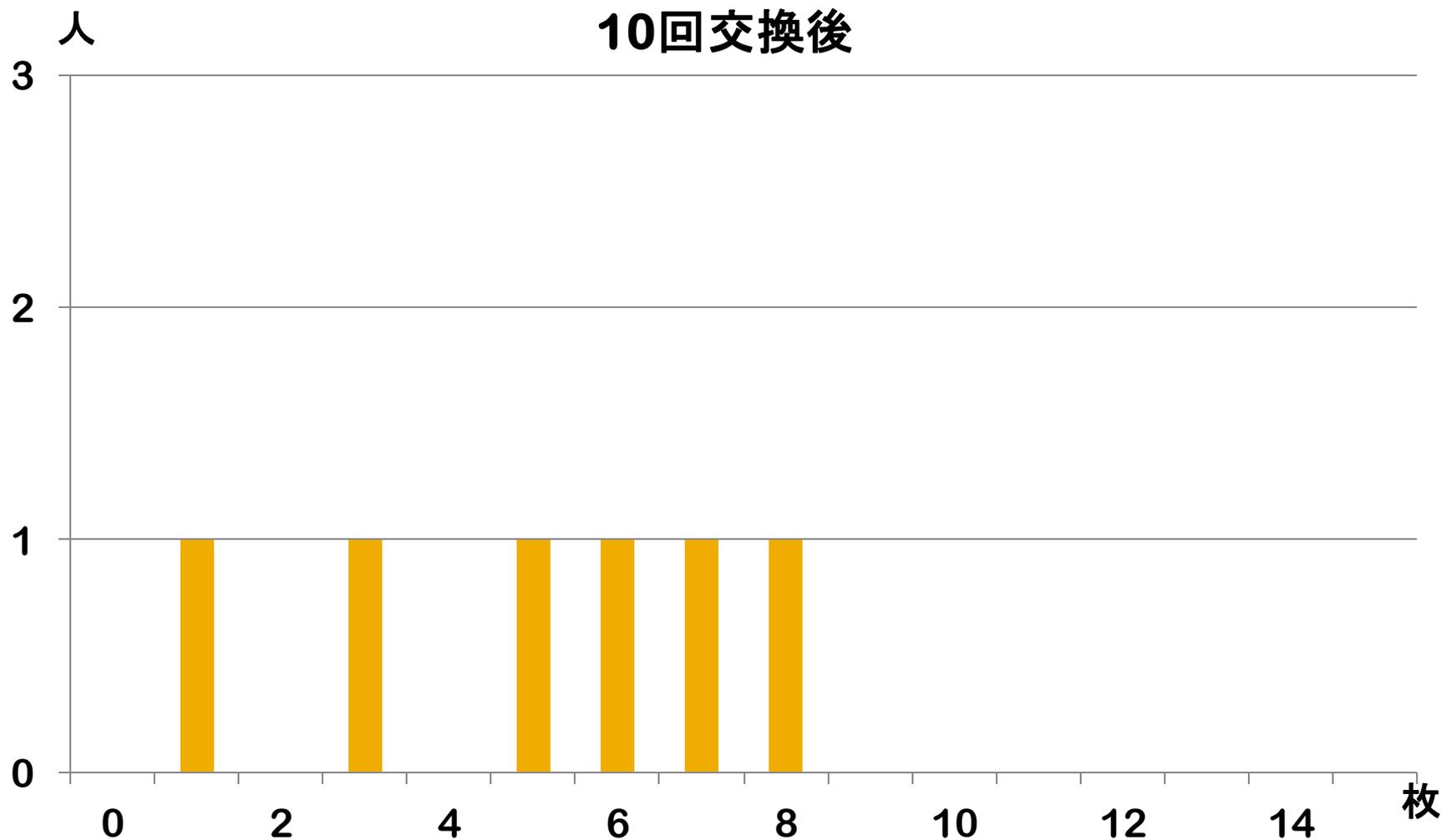
チップの交換でグラフはどうなるか？



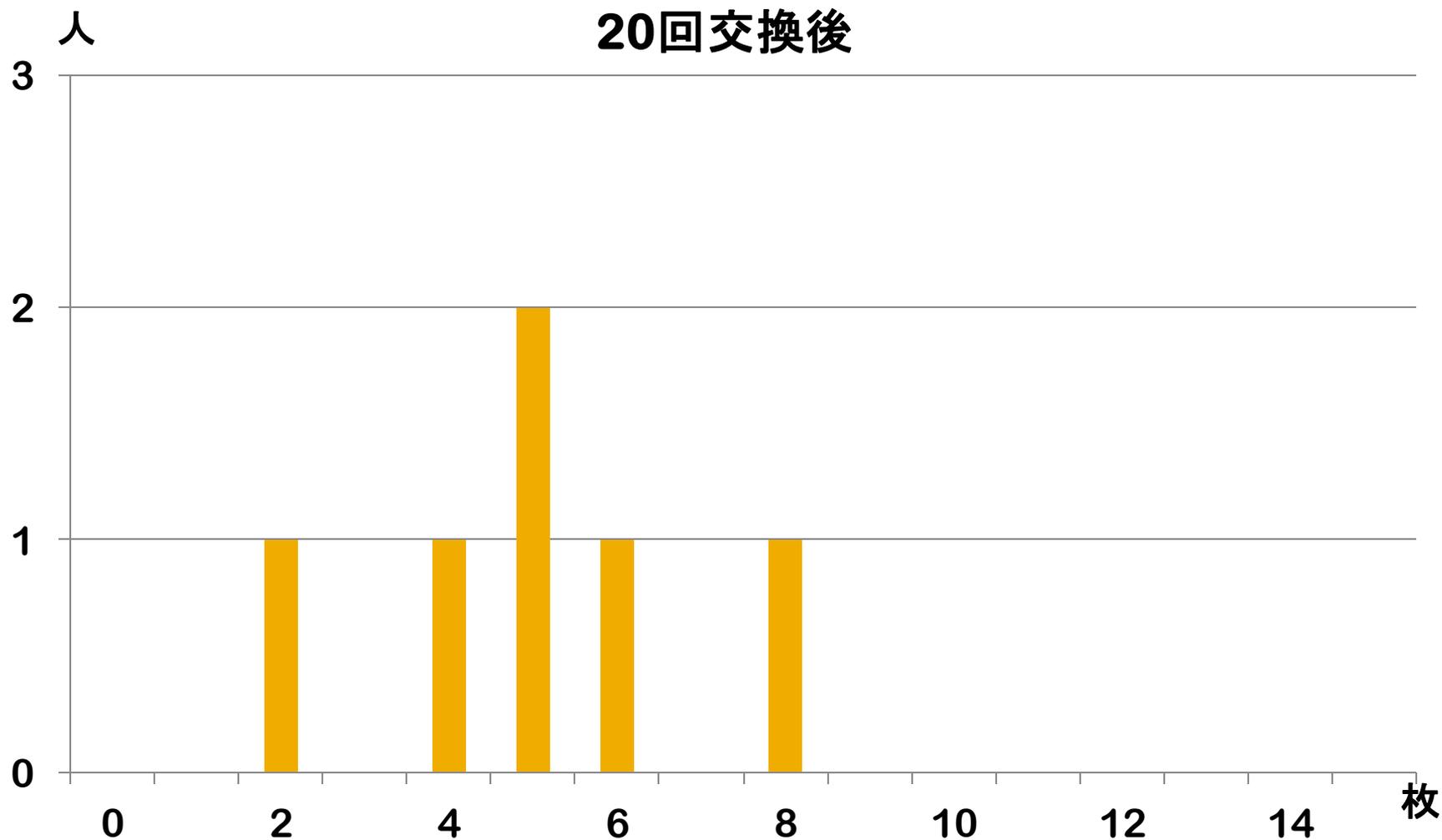
チップの分配の時間変化



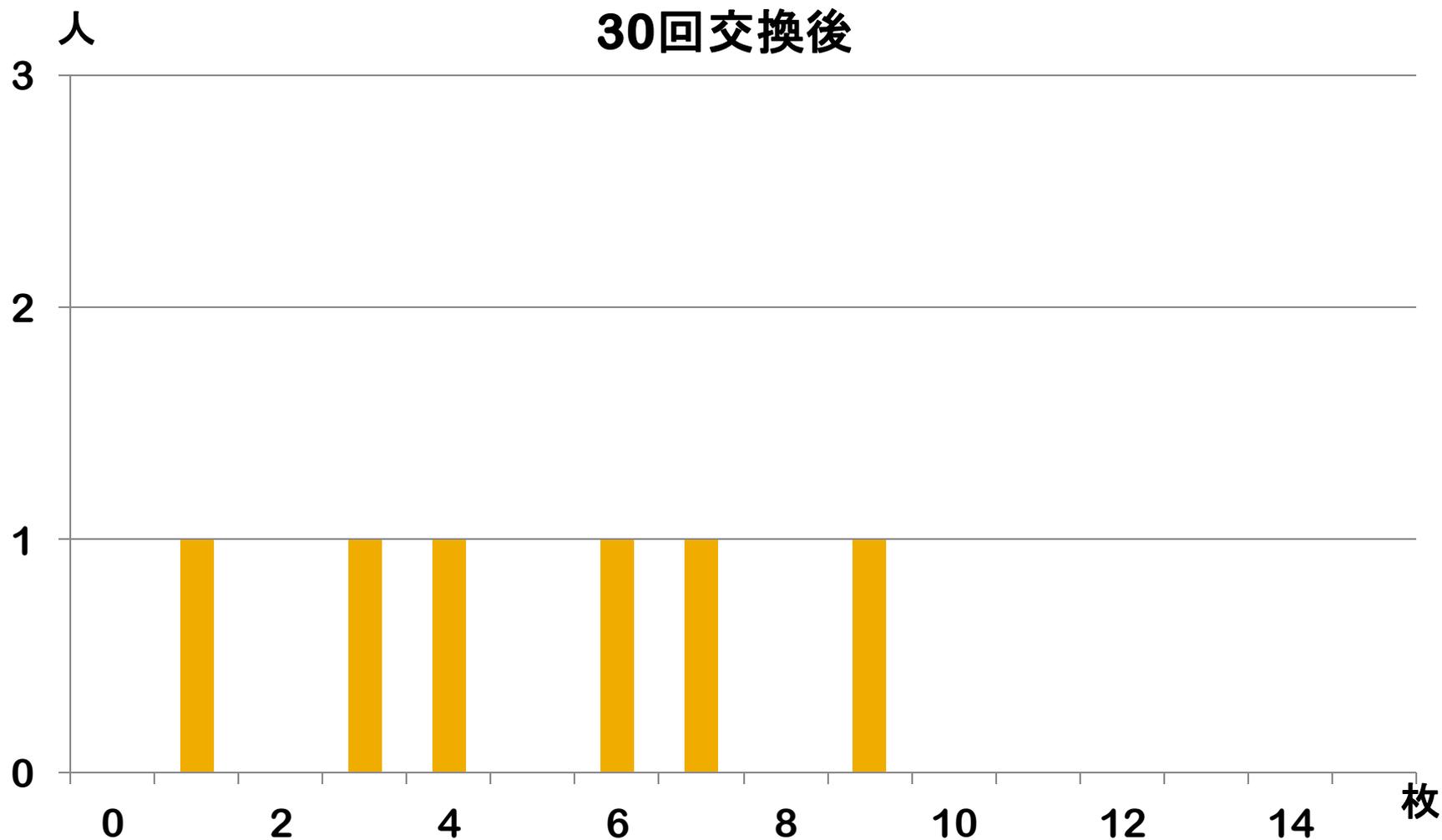
チップの分配の時間変化



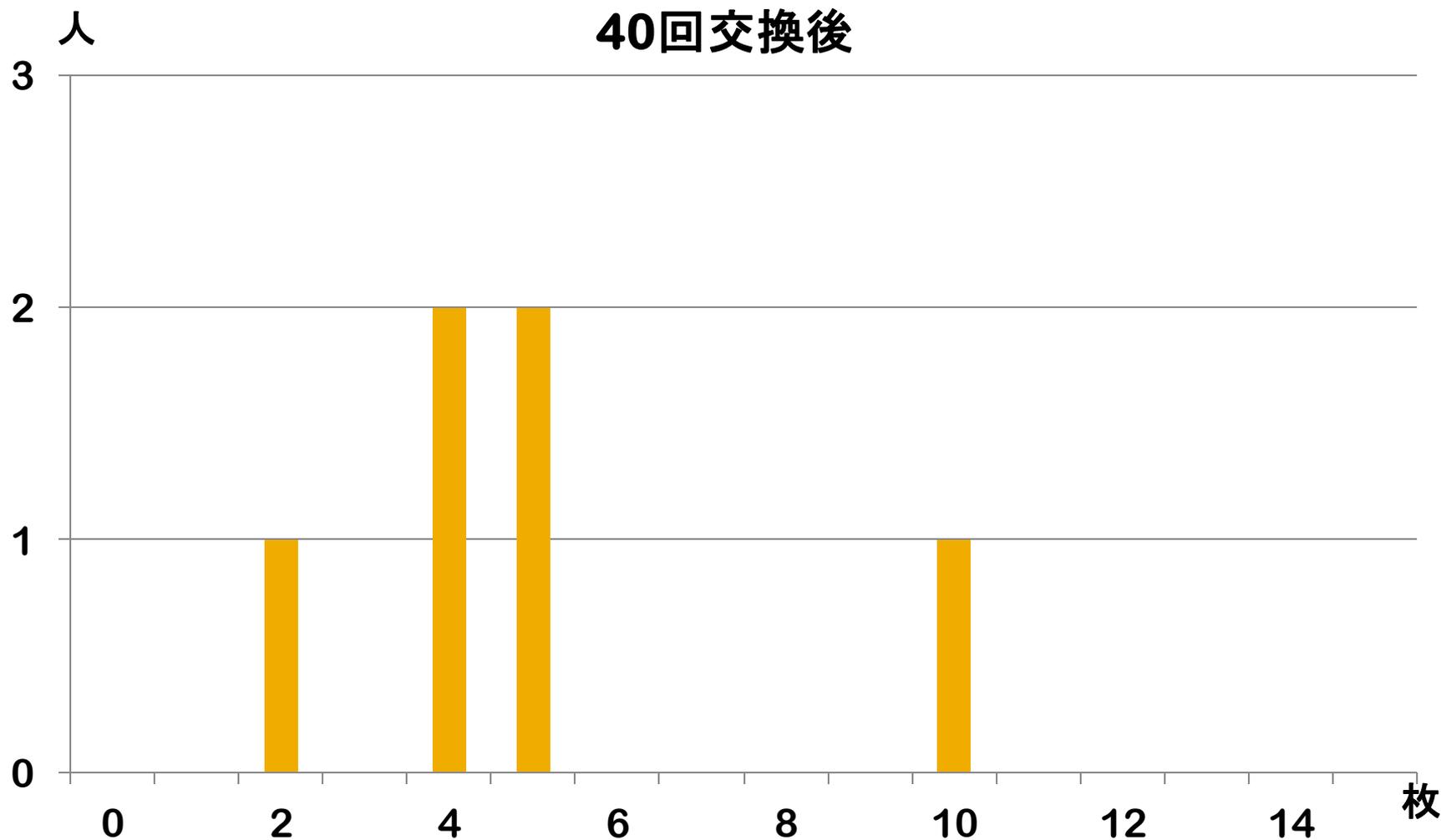
チップの分配の時間変化



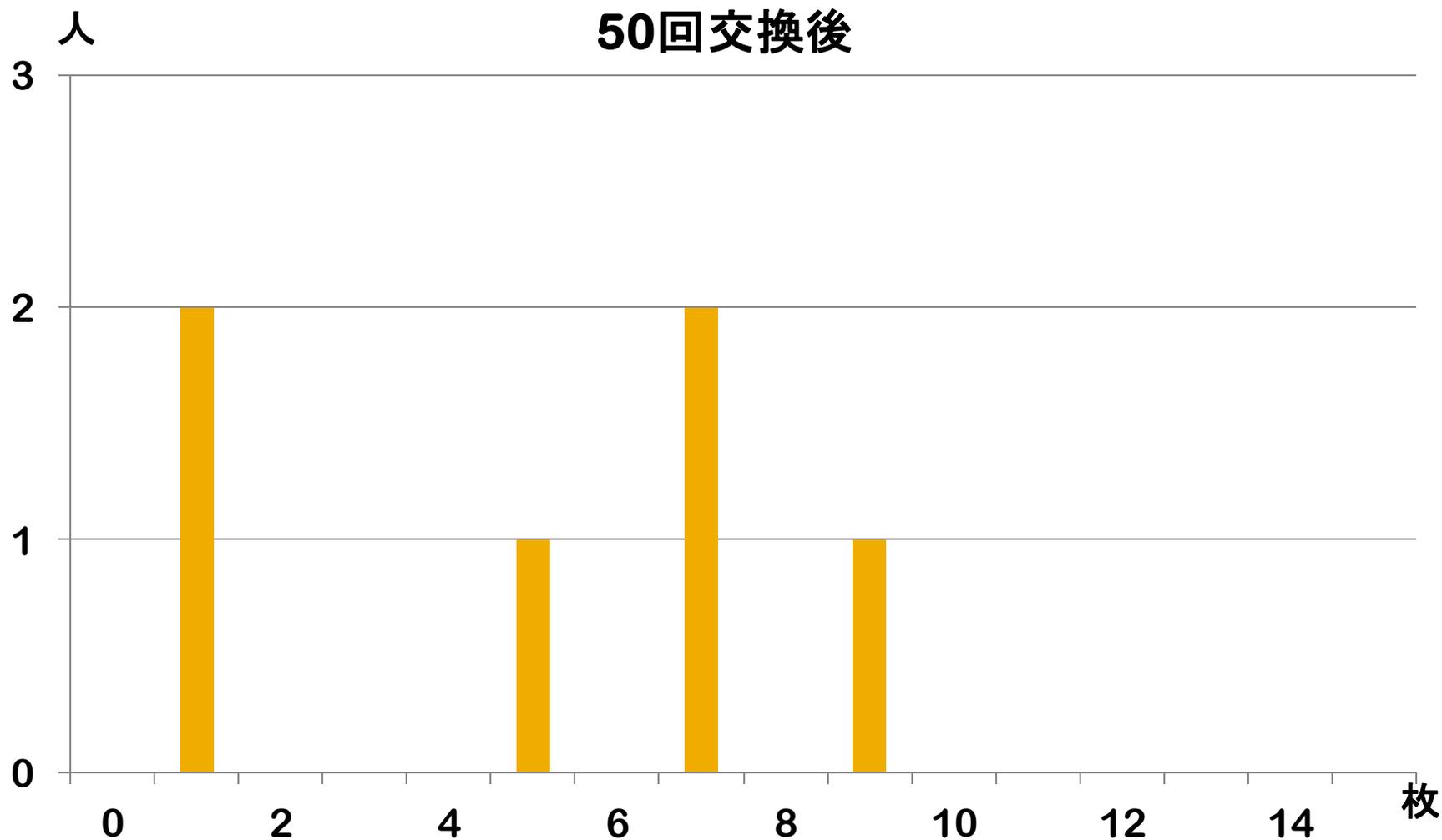
チップの分配の時間変化



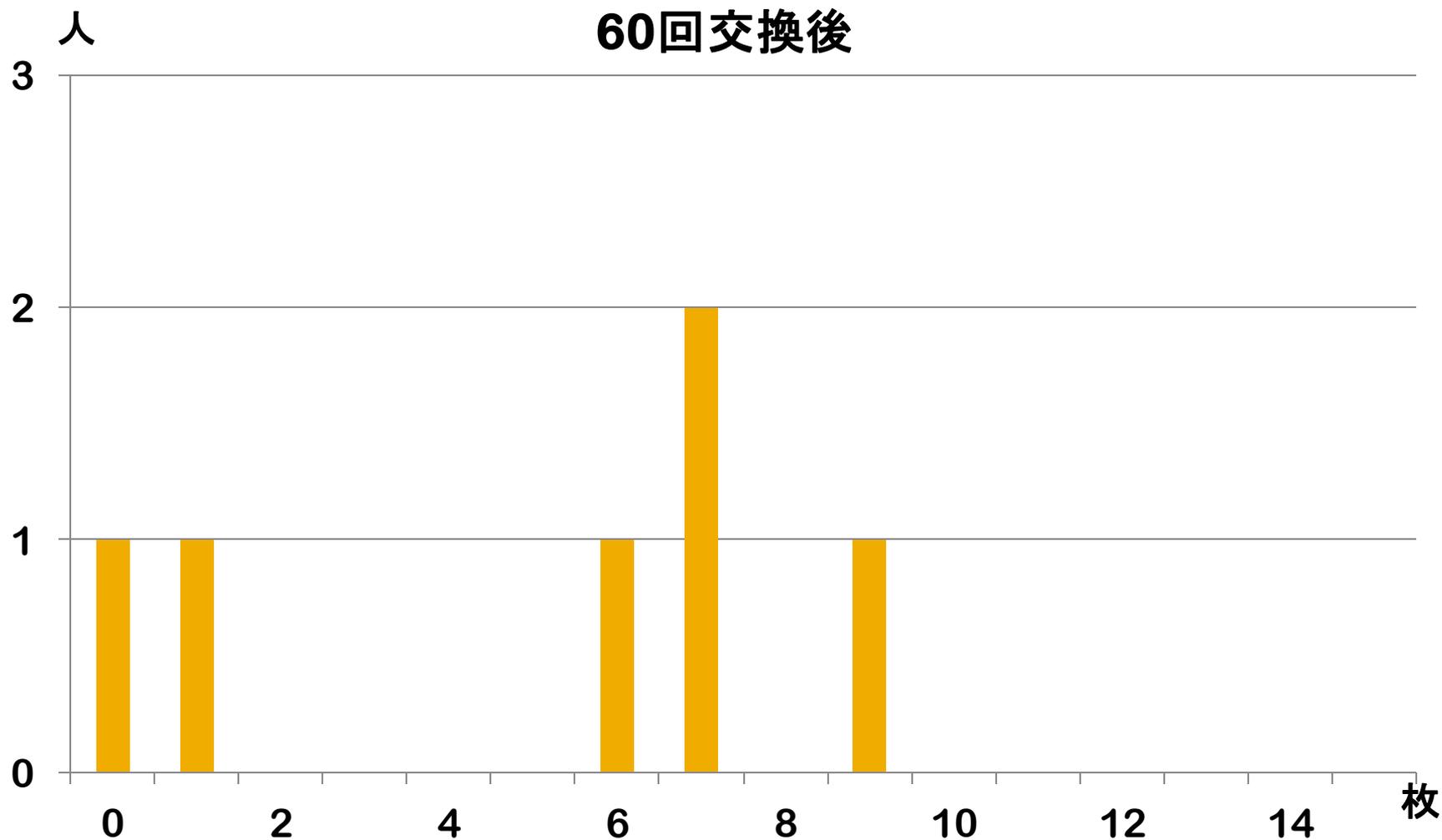
チップの分配の時間変化



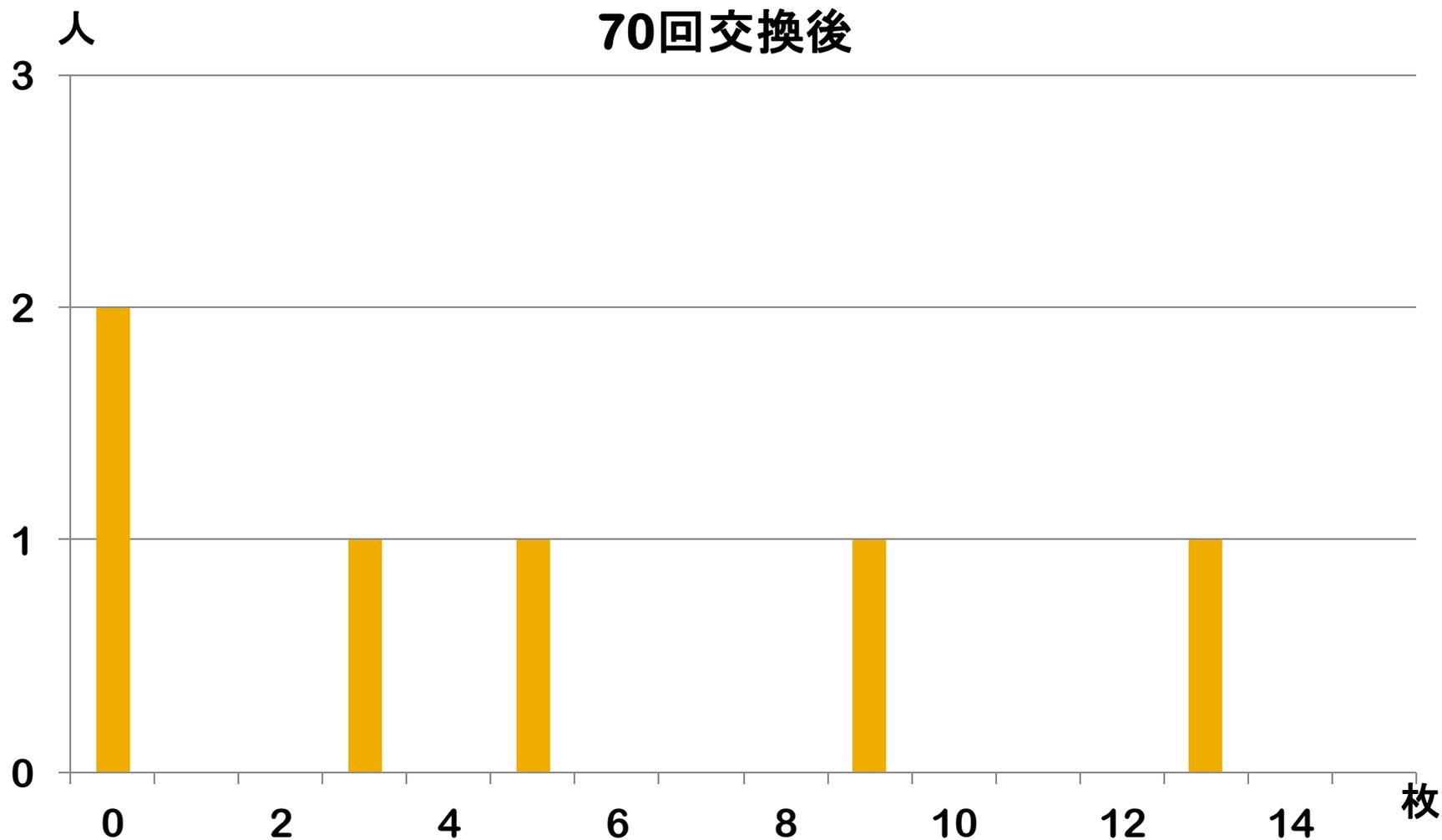
チップの分配の時間変化



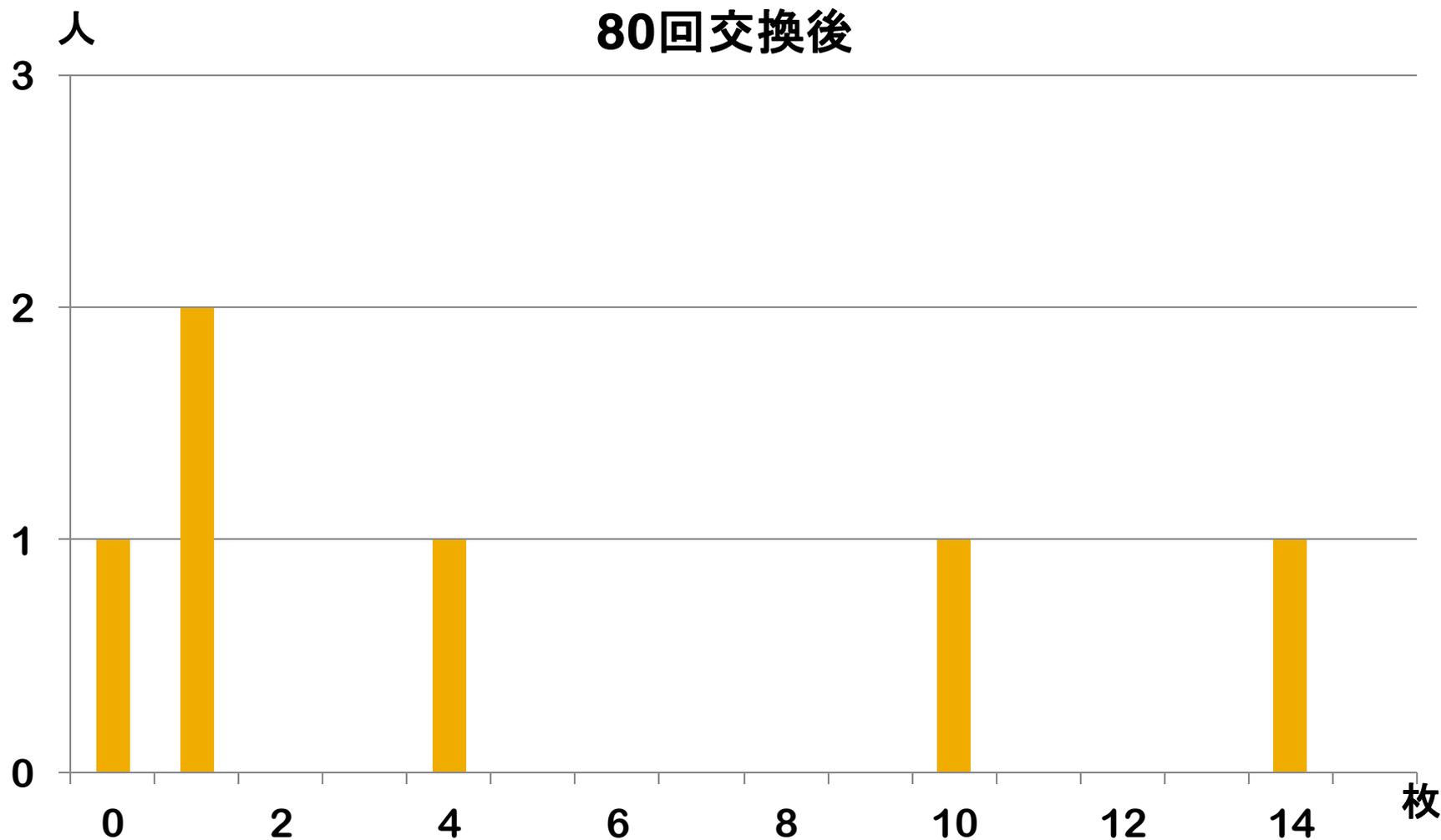
チップの分配の時間変化



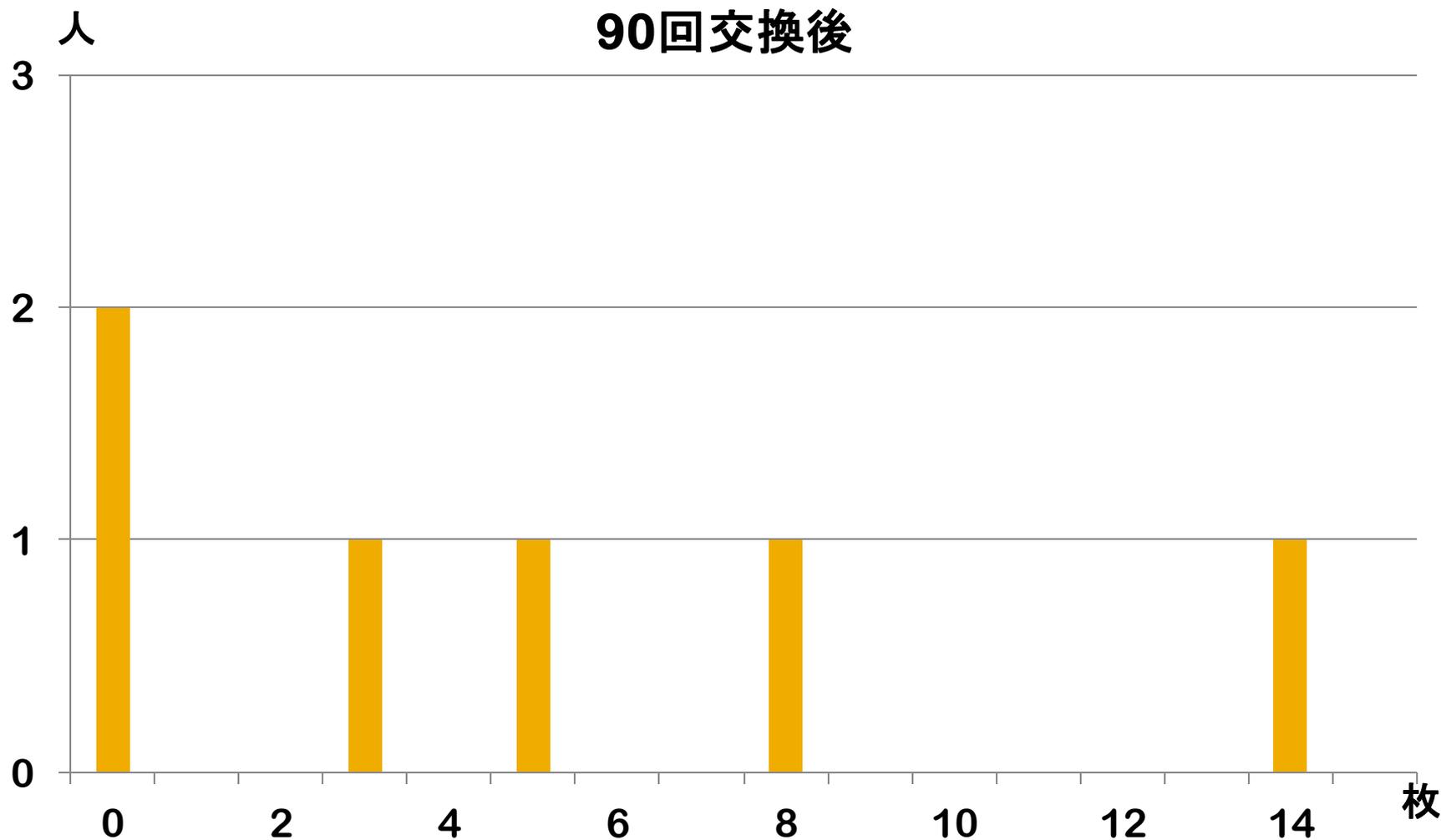
チップの分配の時間変化



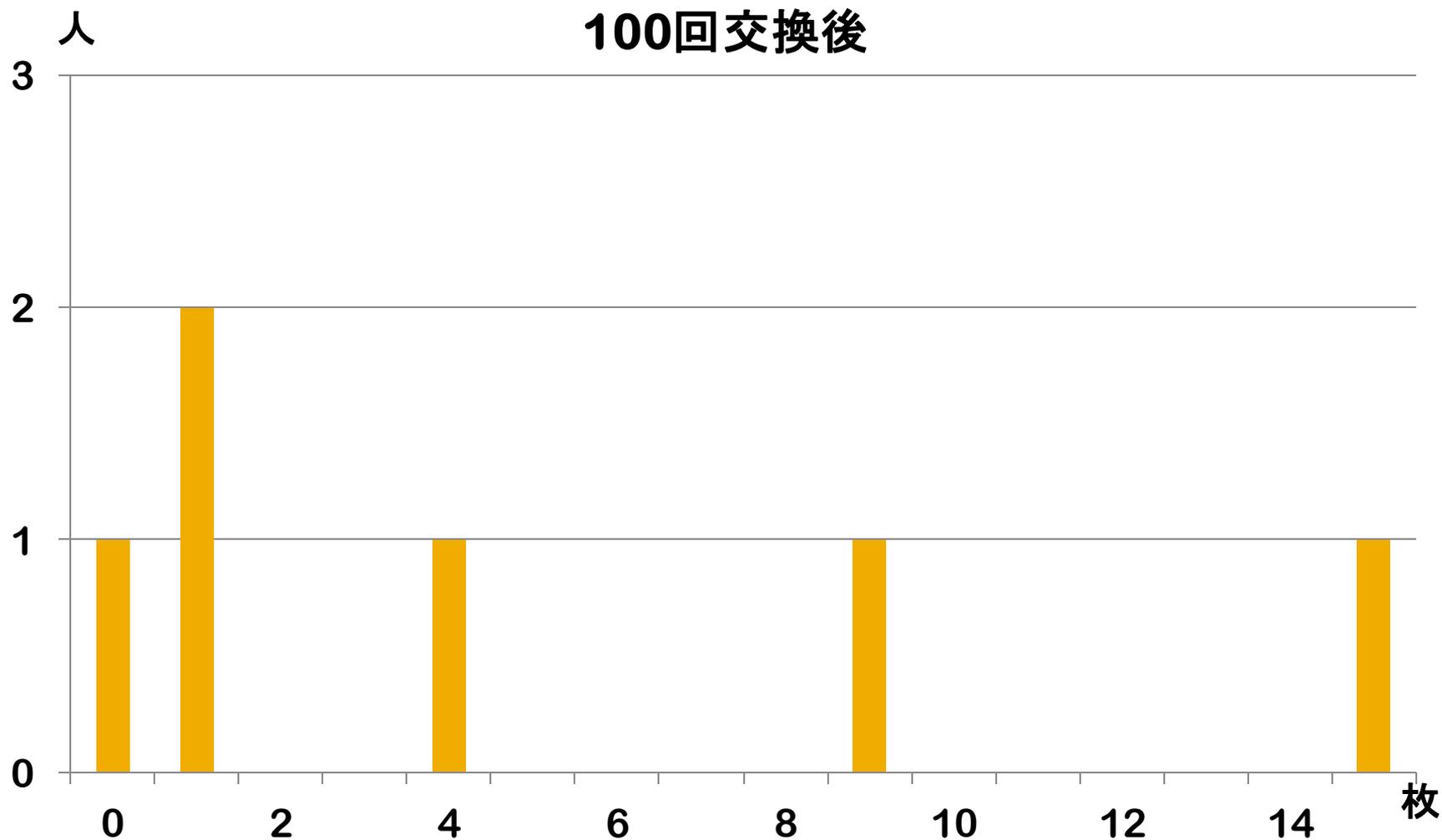
チップの分配の時間変化



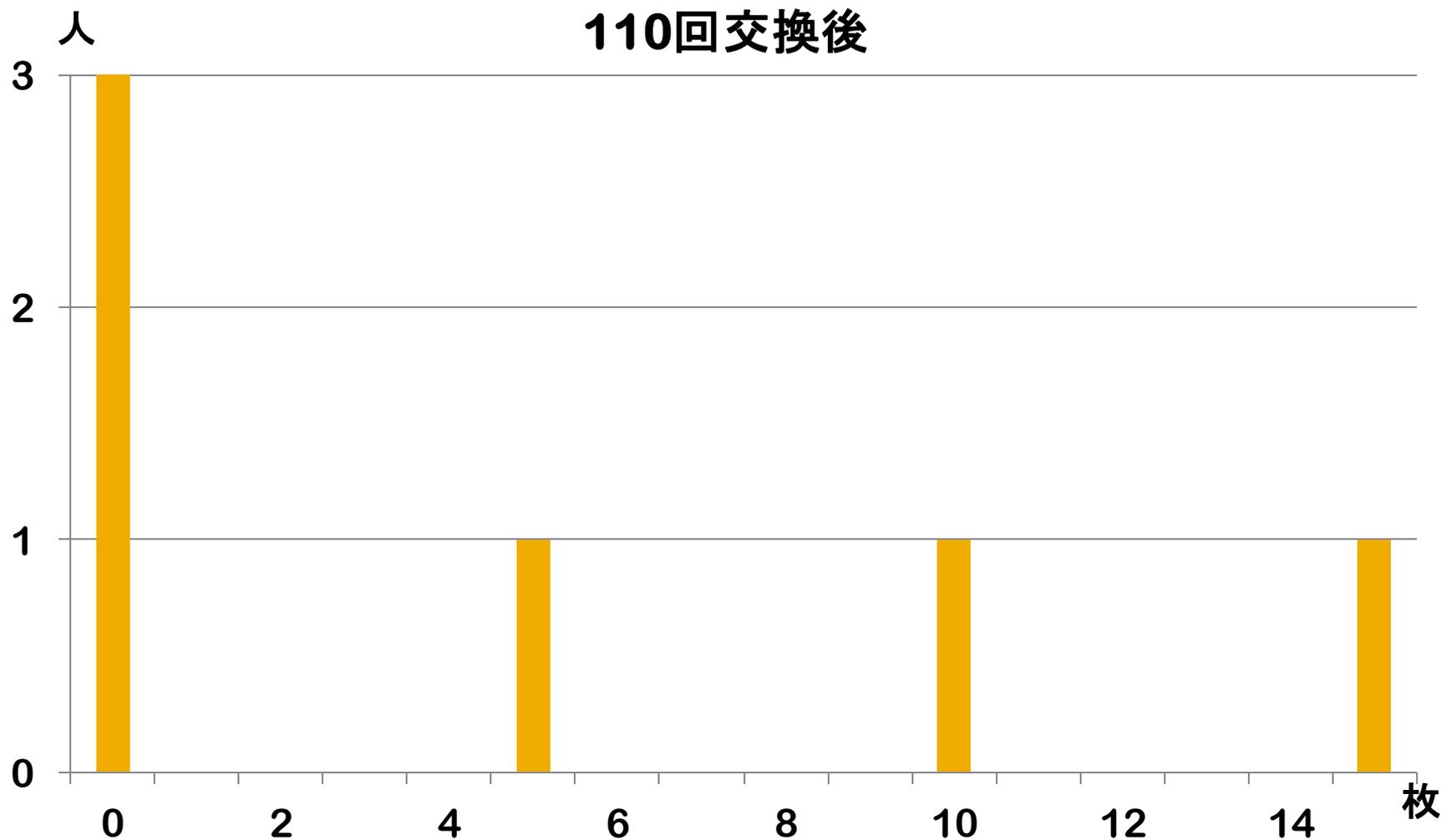
チップの分配の時間変化



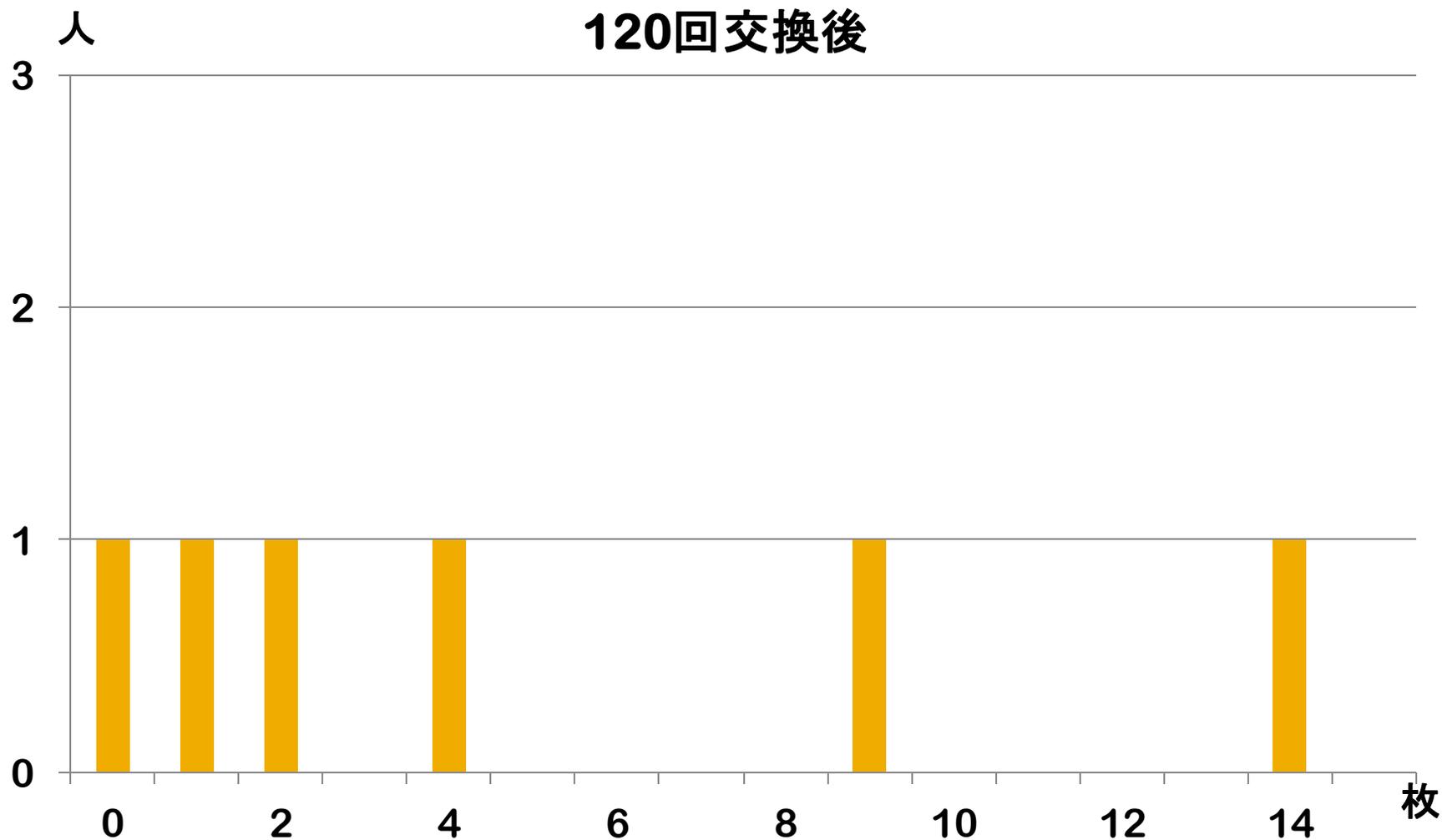
チップの分配の時間変化



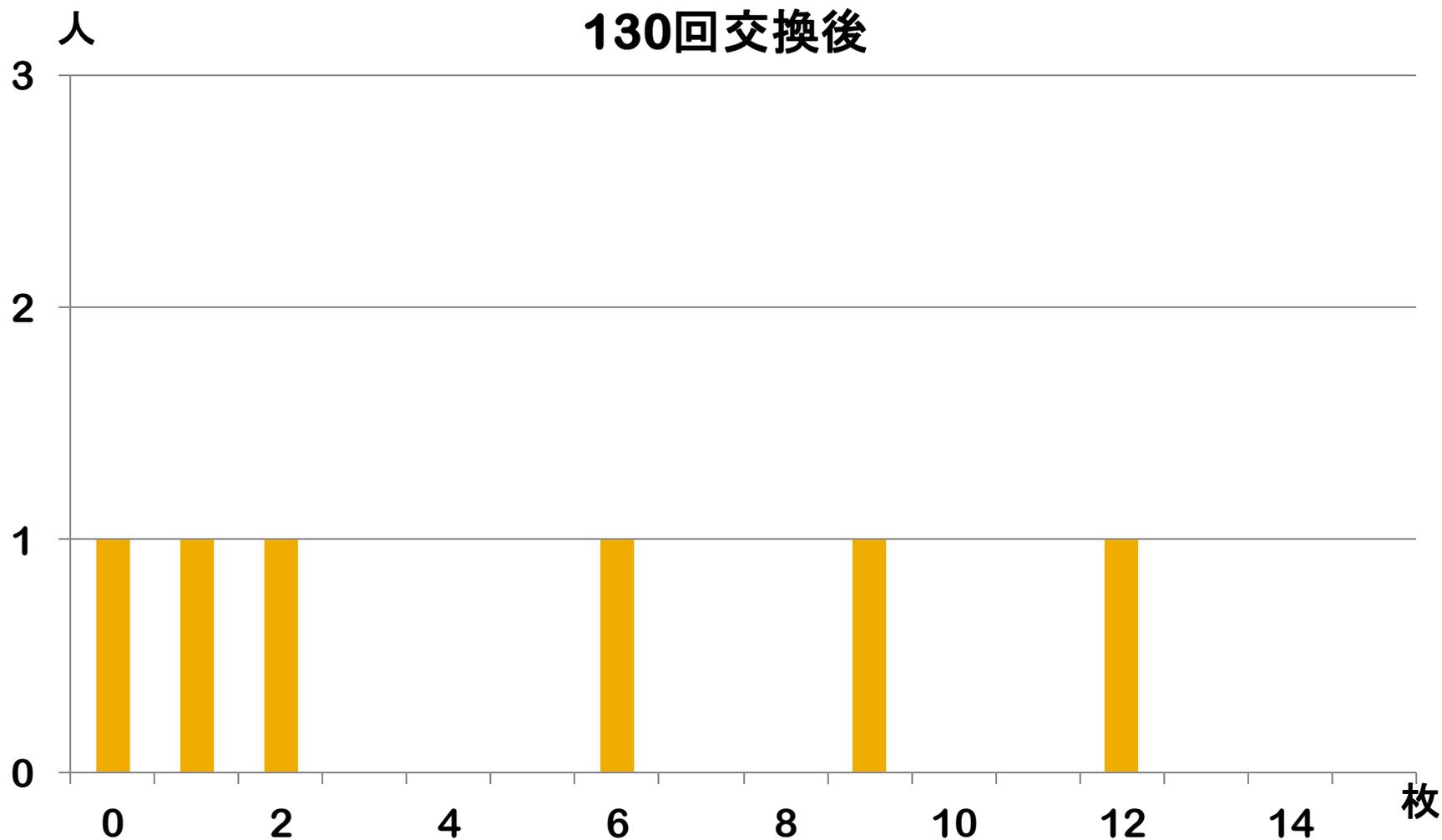
チップの分配の時間変化



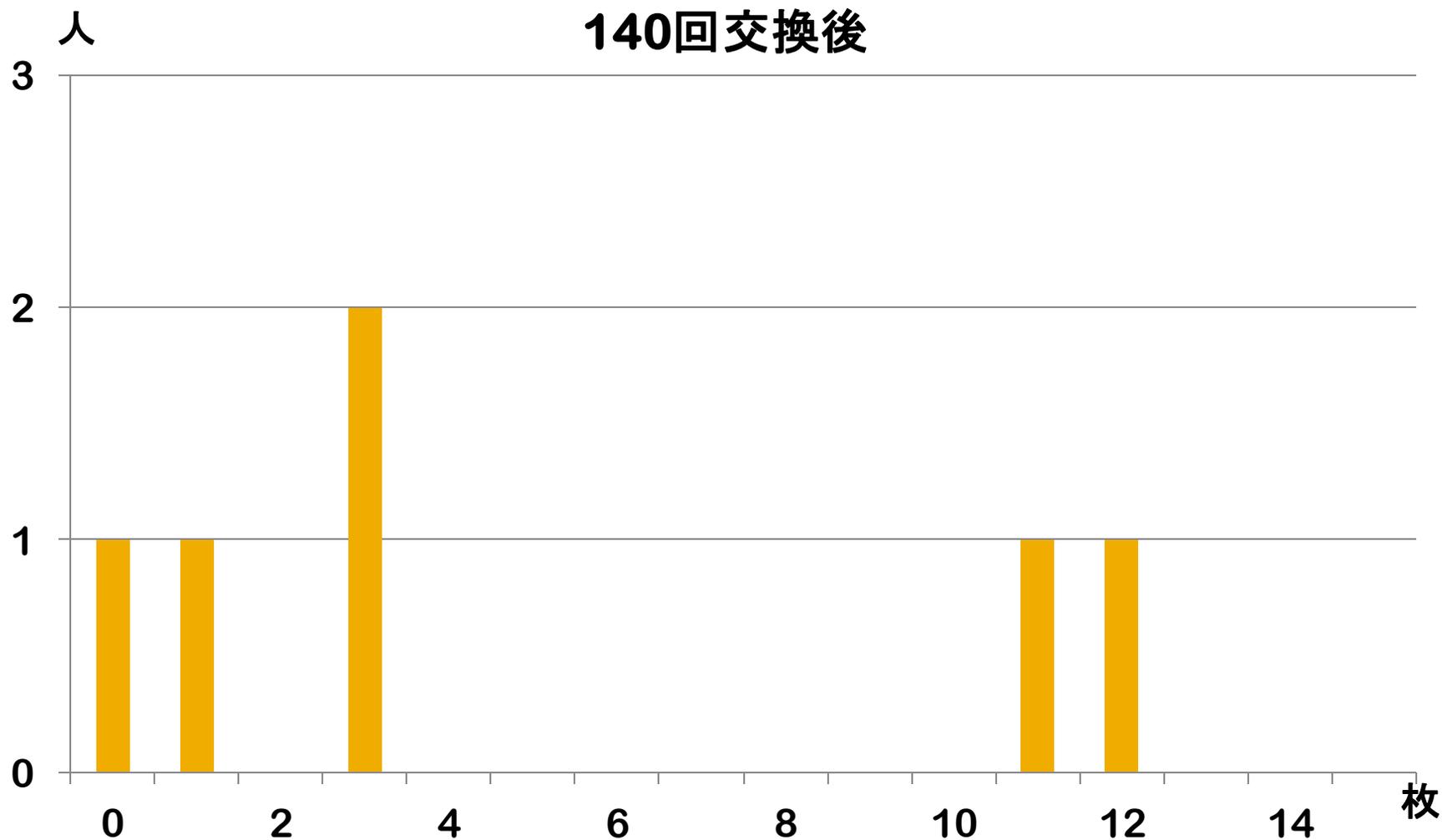
チップの分配の時間変化



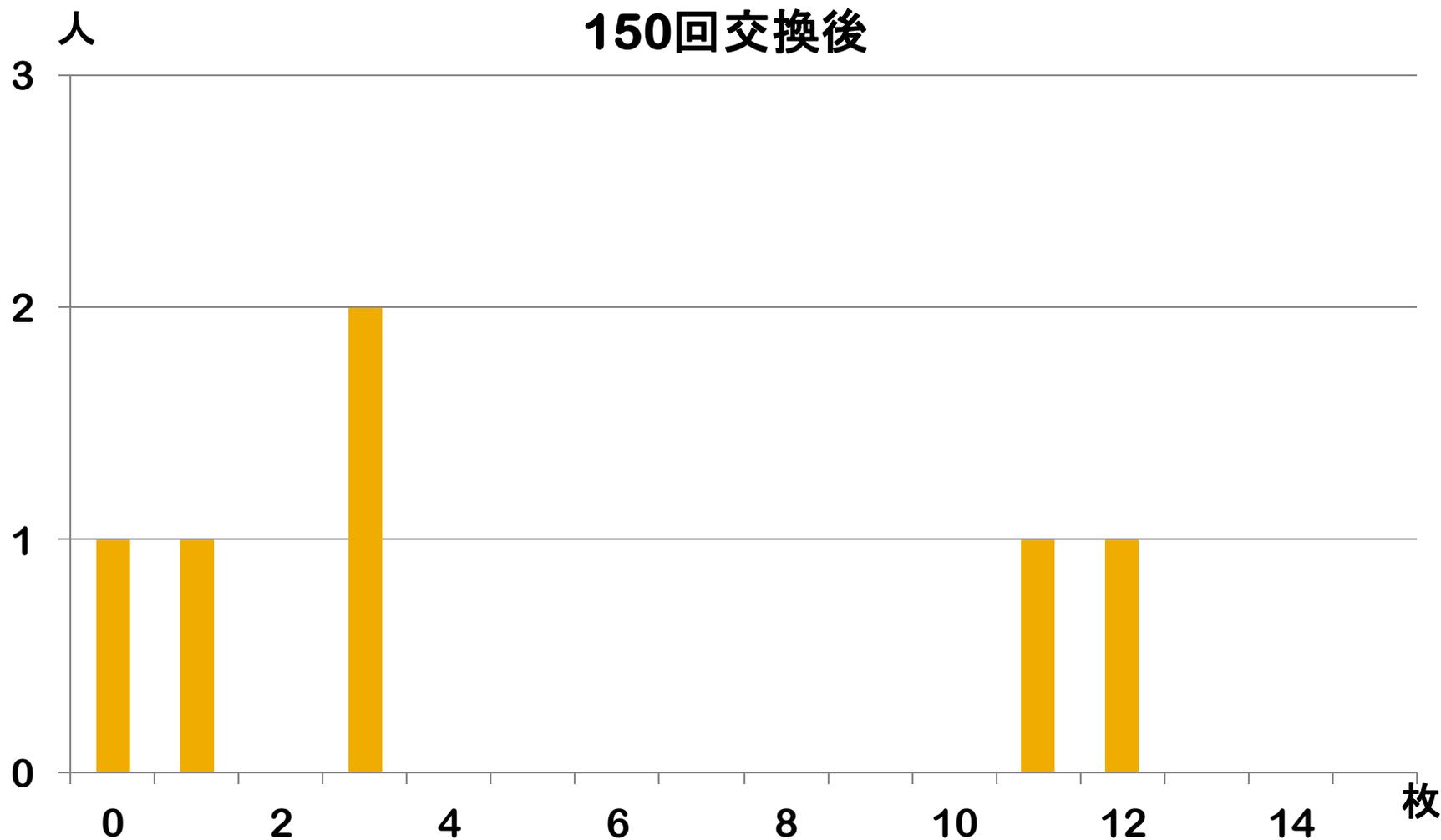
チップの分配の時間変化



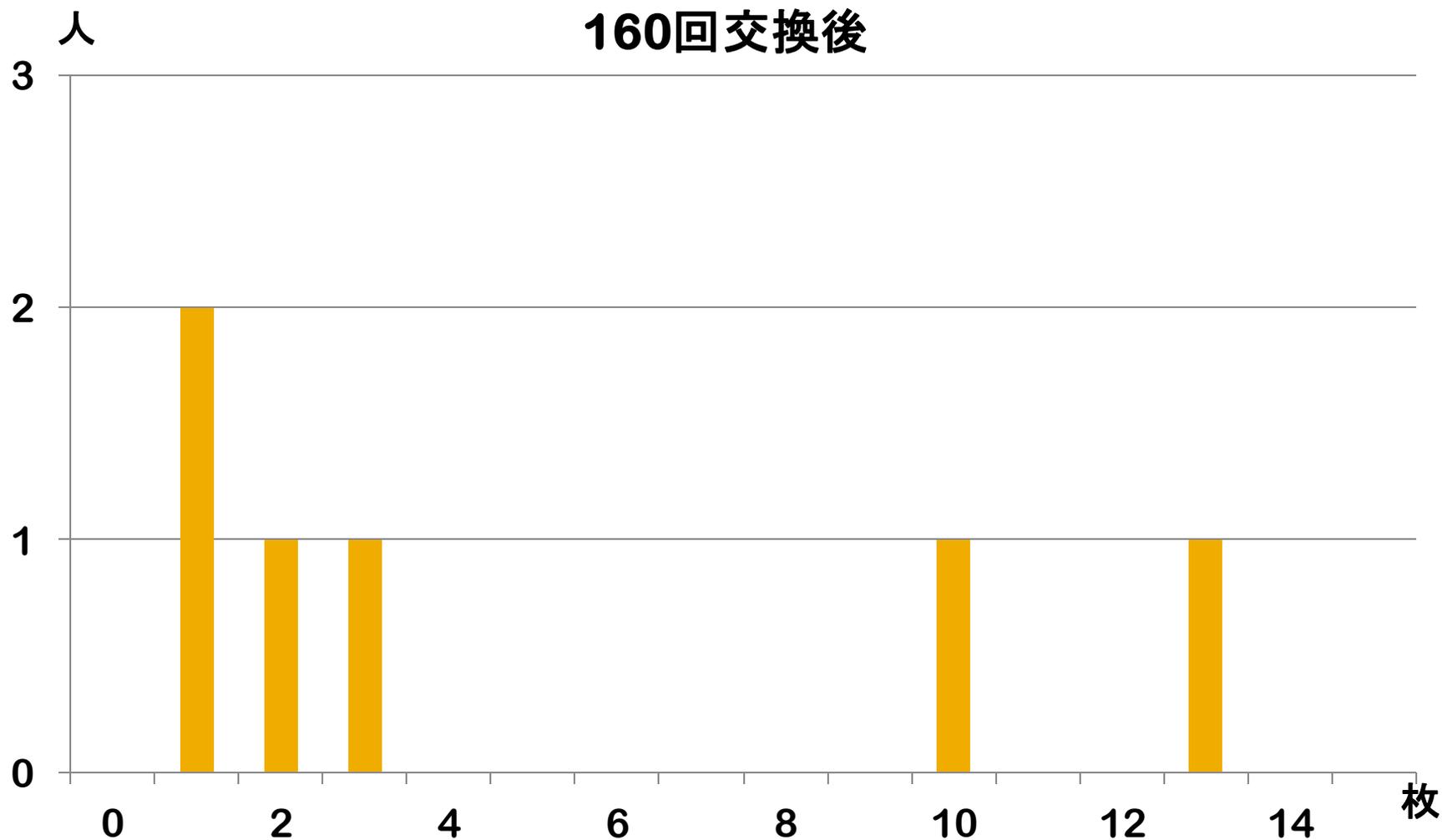
チップの分配の時間変化



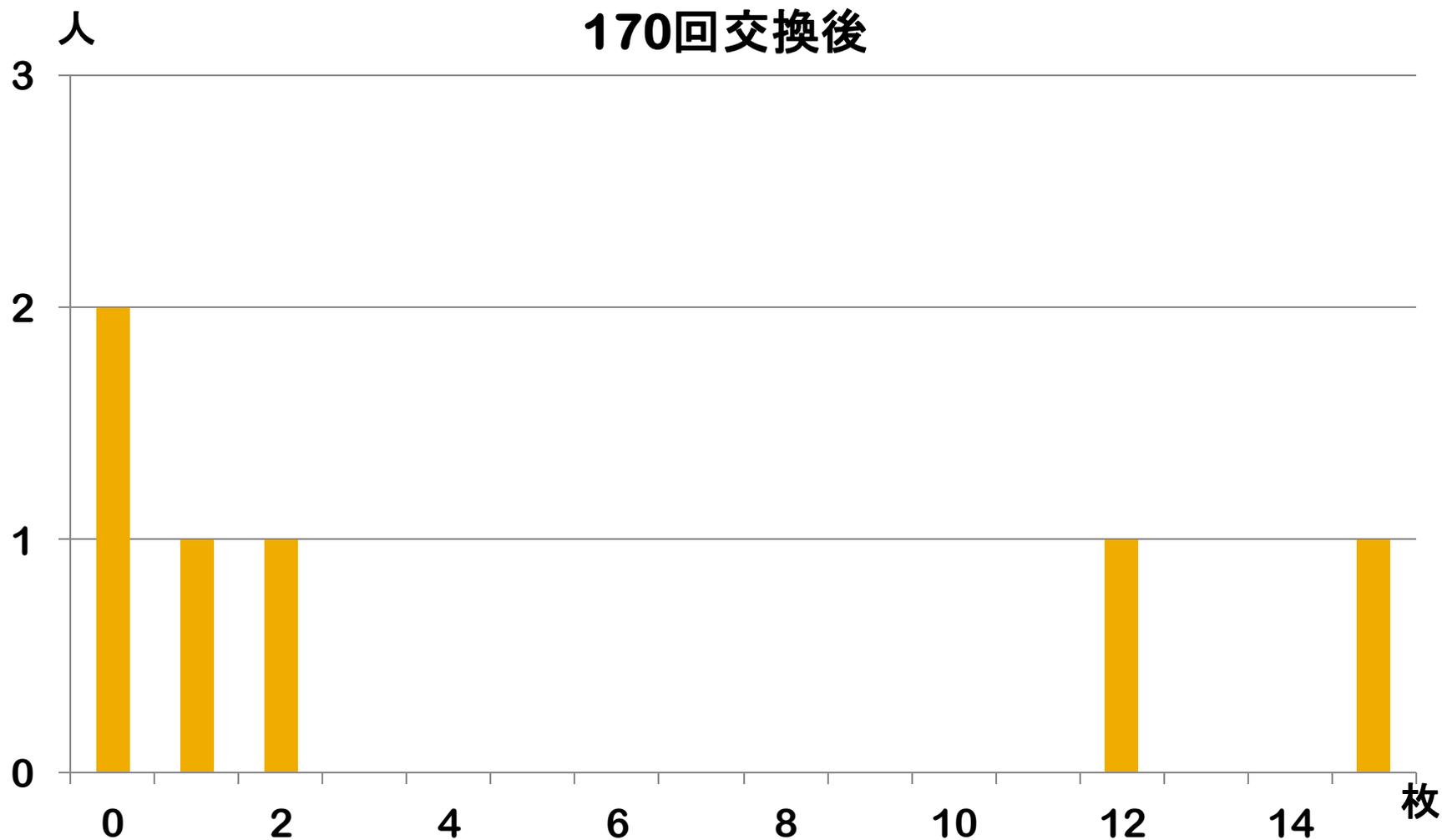
チップの分配の時間変化



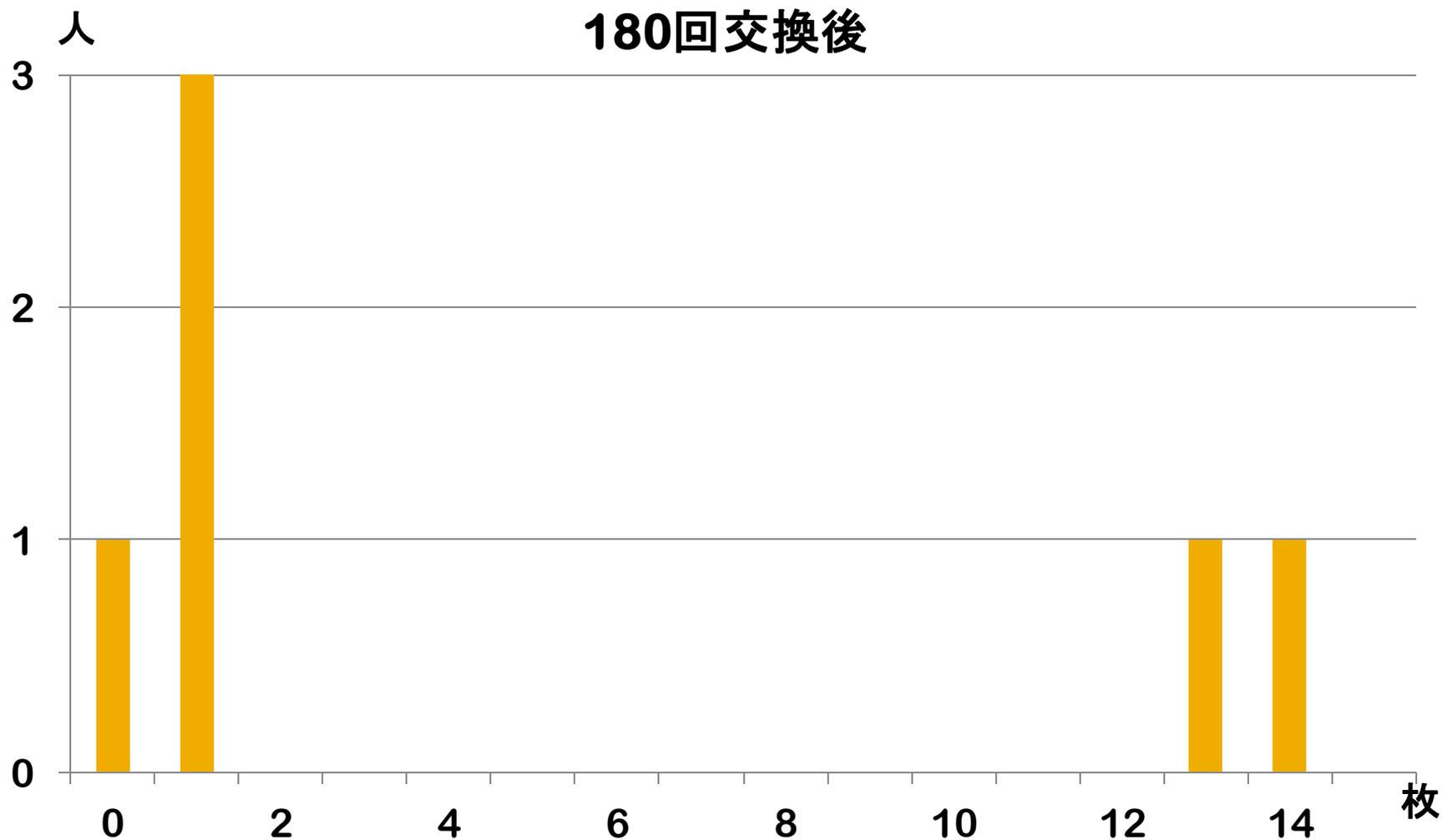
チップの分配の時間変化



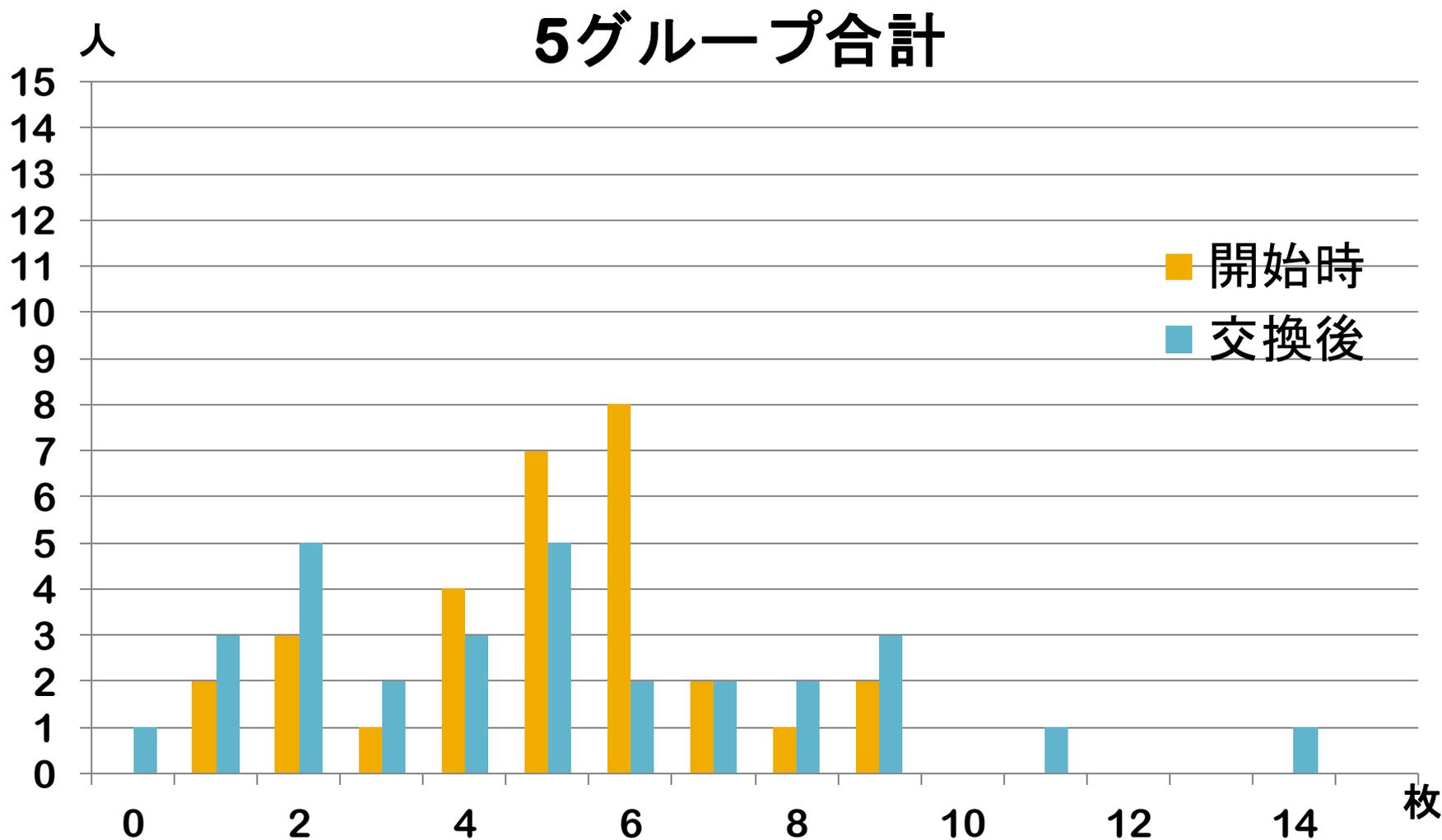
チップの分配の時間変化



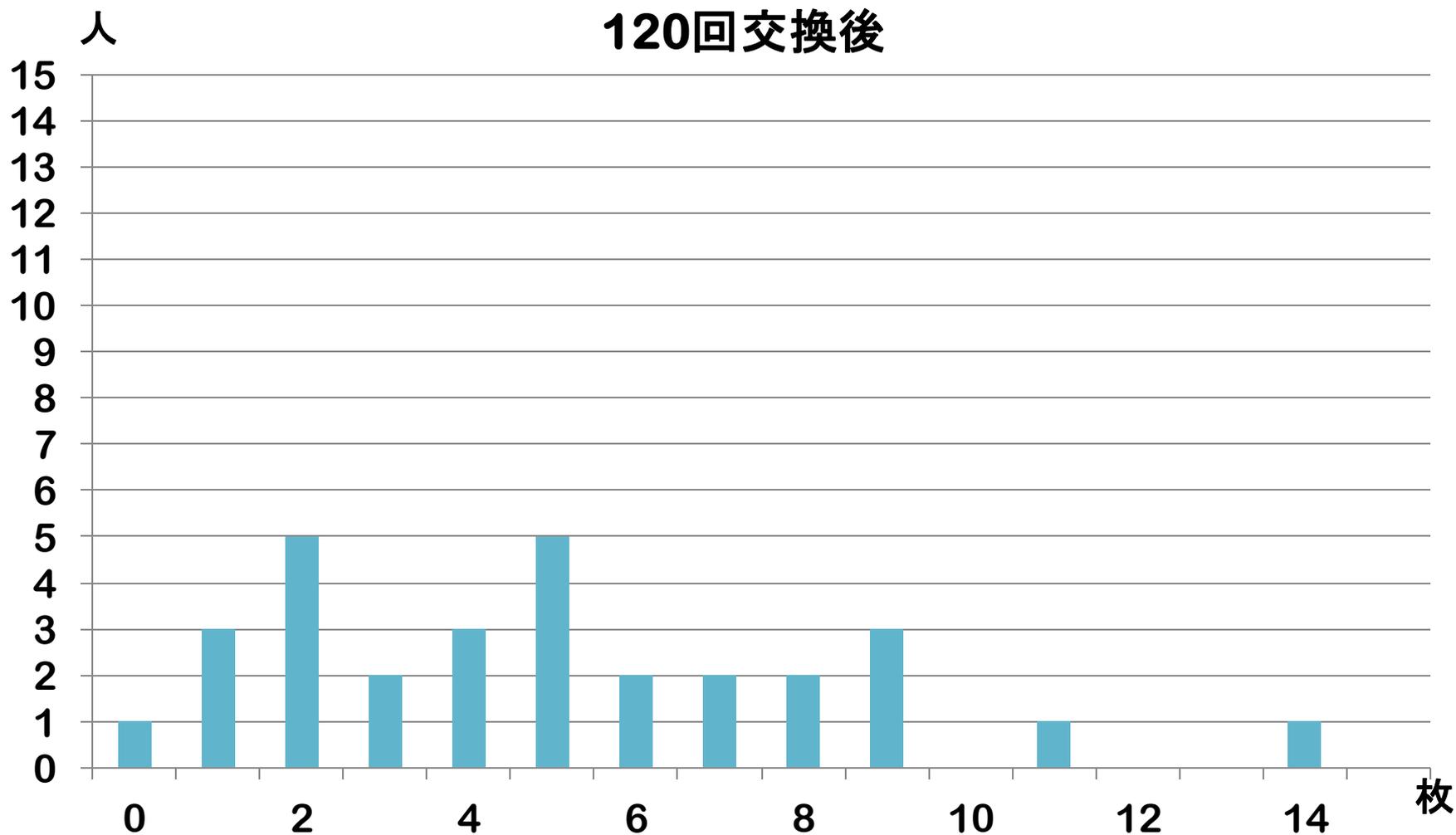
チップの分配の時間変化



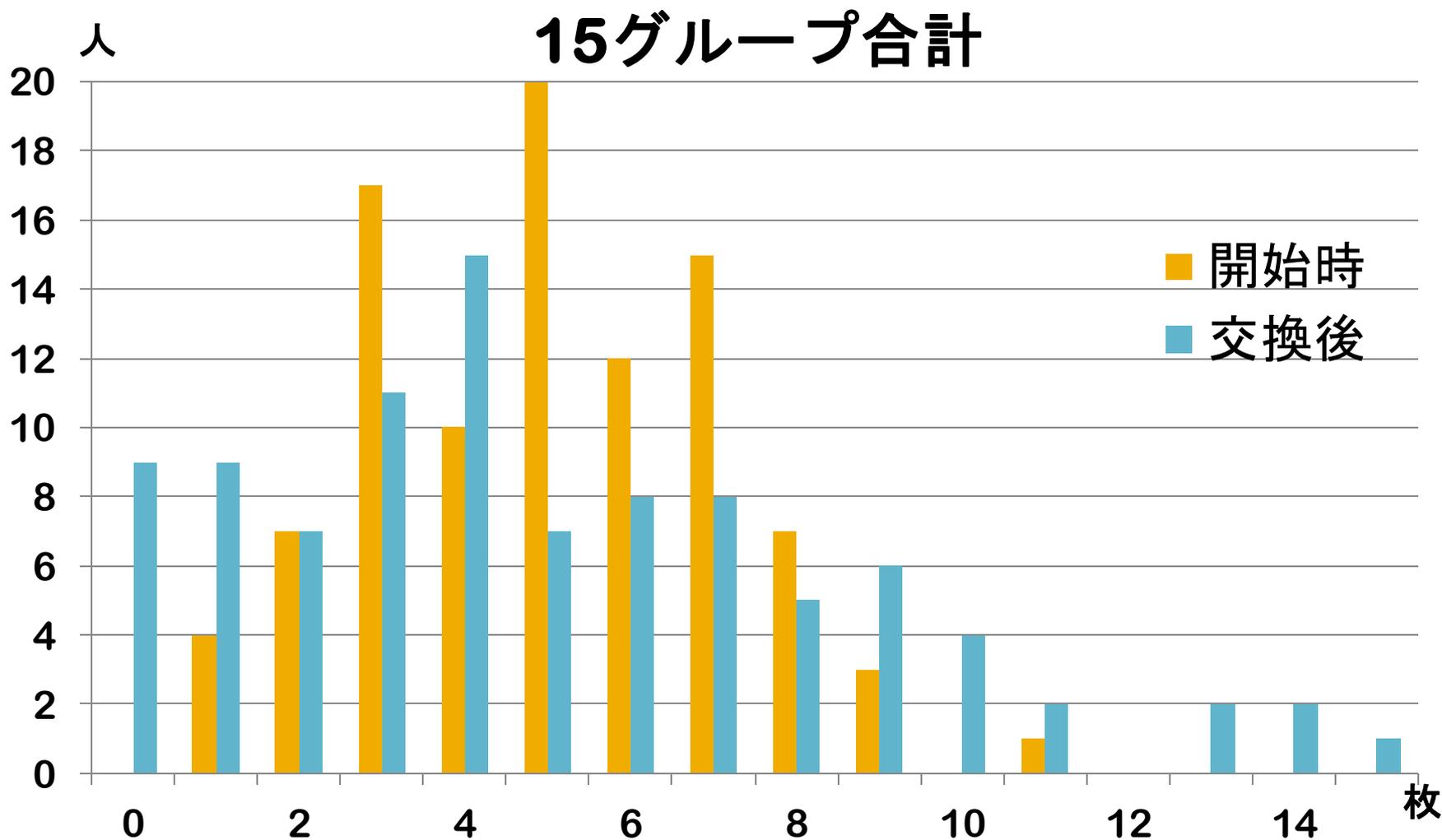
チップの分配の時間変化



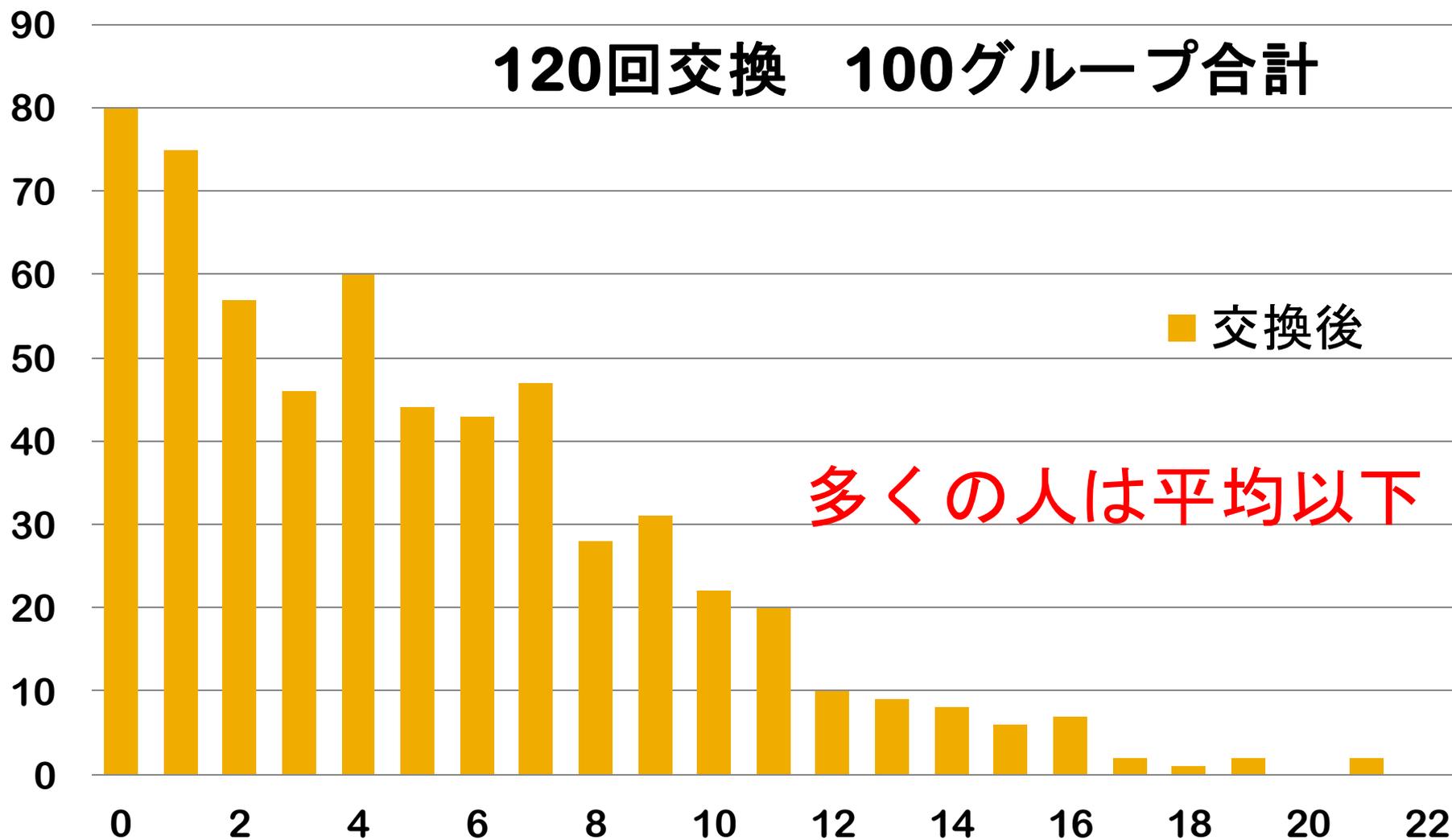
チップの分配の時間変化



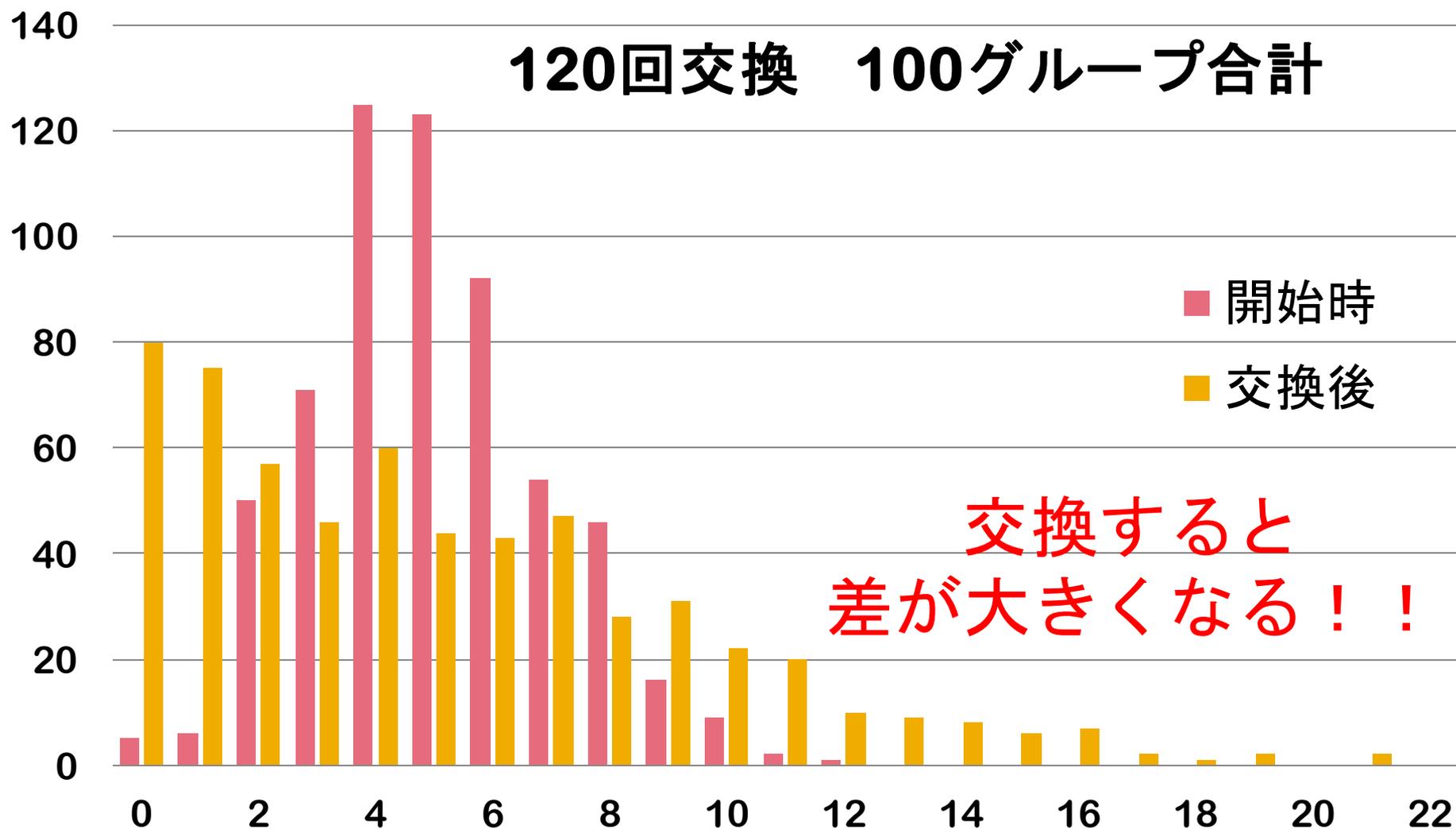
チップの分配の時間変化



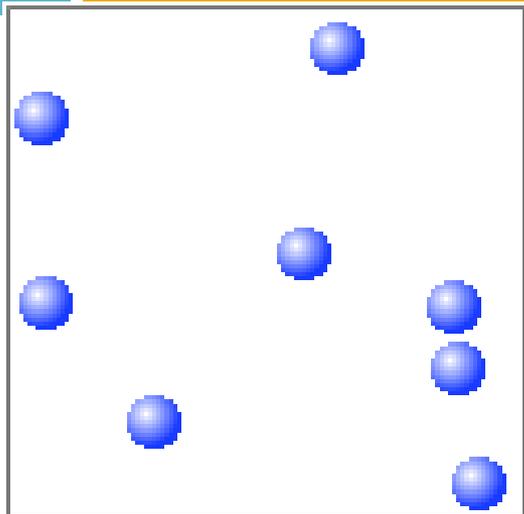
チップ交換後の分配の様子



チップ交換前後での分配の変化



チップ交換はエネルギー交換



温度 = 分子運動の激しさ

エネルギー

分子はランダムに動き回り、
ぶつかりあう事でエネルギーを交換

皆さん	=	分子
サイコロ	=	分子のランダムな衝突
チップ	=	分子のエネルギー
チップの平均値	=	温度

分子のエネルギー分布

温度 T であるエネルギー E_i をもつ分子の個数 N_i

ボルツマン分布
$$N_i = C \cdot e^{\frac{-E_i}{k_B T}}$$



ルートヴィヒ・ボルツマン
(1844-1906)

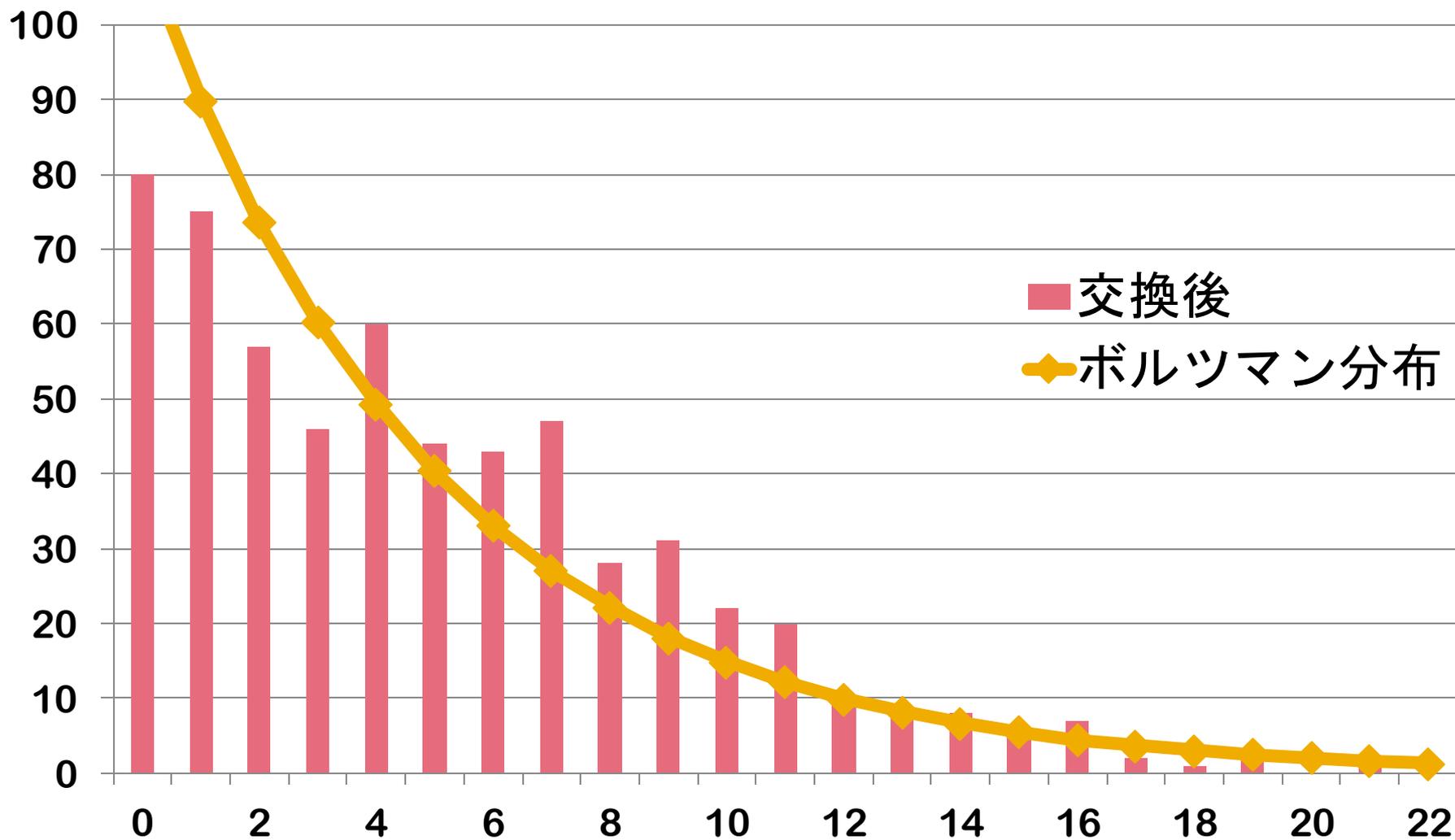
平均 M 枚のとき、チップを m 枚もつ人数 n

チップの分布

$$n = C' \cdot e^{\frac{-m}{M}}$$

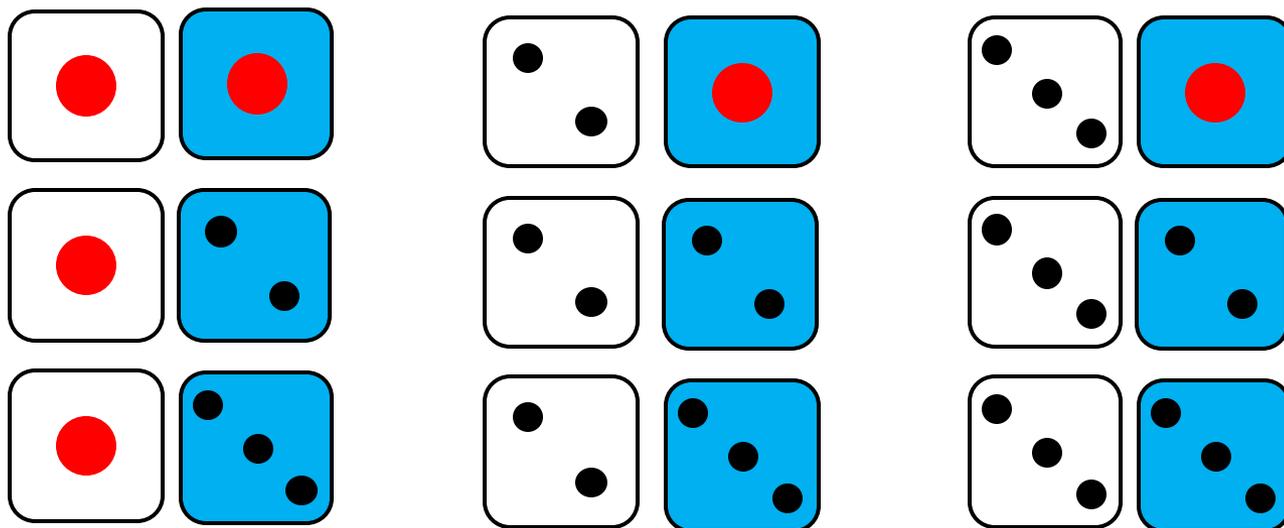
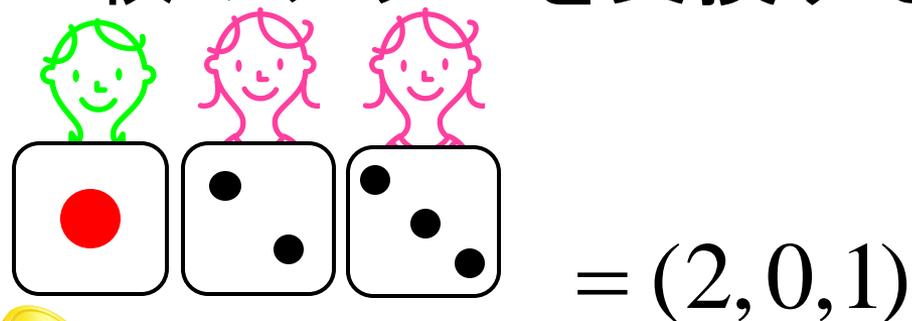
皆さん = 分子
チップ = 分子のエネルギー
チップの平均値 = 温度

ボルツマン分布との比較



すごろくで不公平の理由を探る

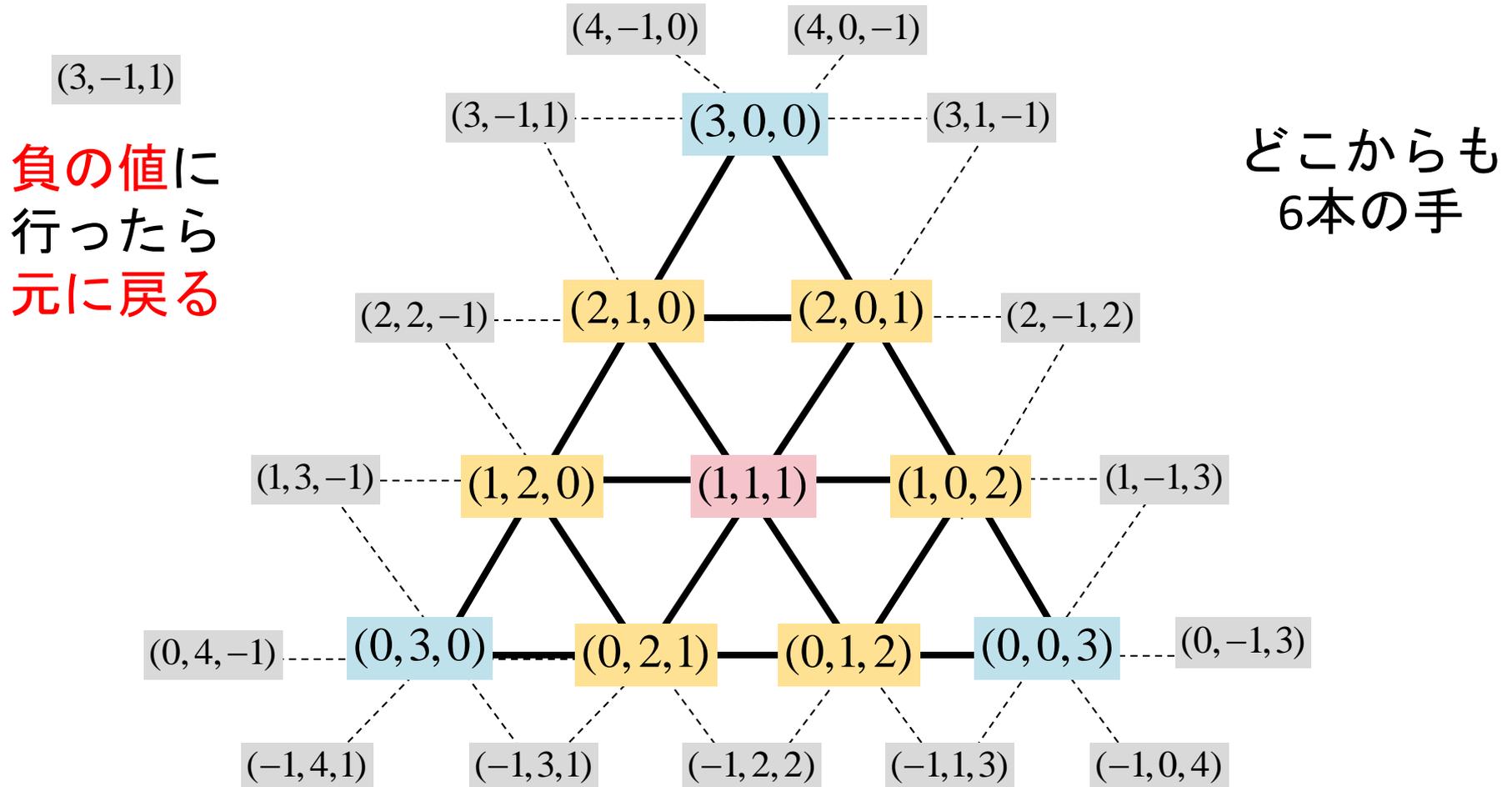
3人で3枚のチップを交換する



サイコロの
出目は
9通り

すごろくで不公平の理由を探る

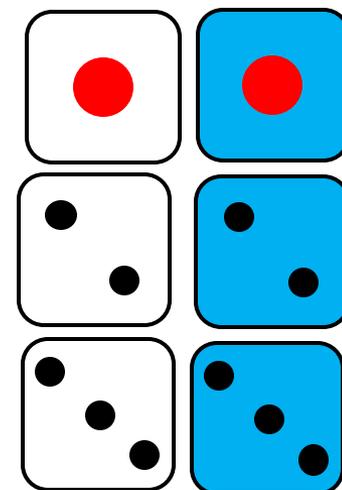
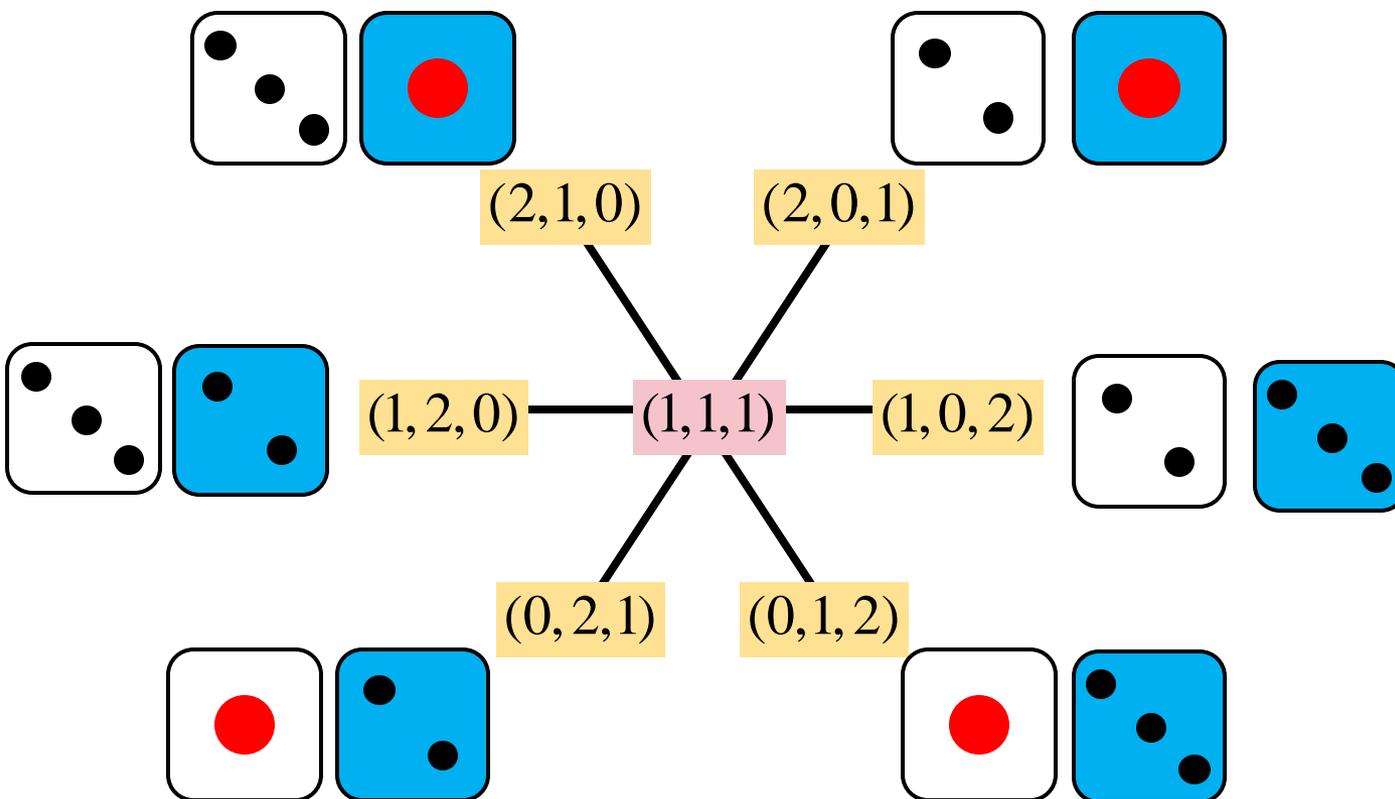
全ての状態をすごろく風に行きかう



すごろくで不公平の理由を探る

状態 (1,1,1) からの移動

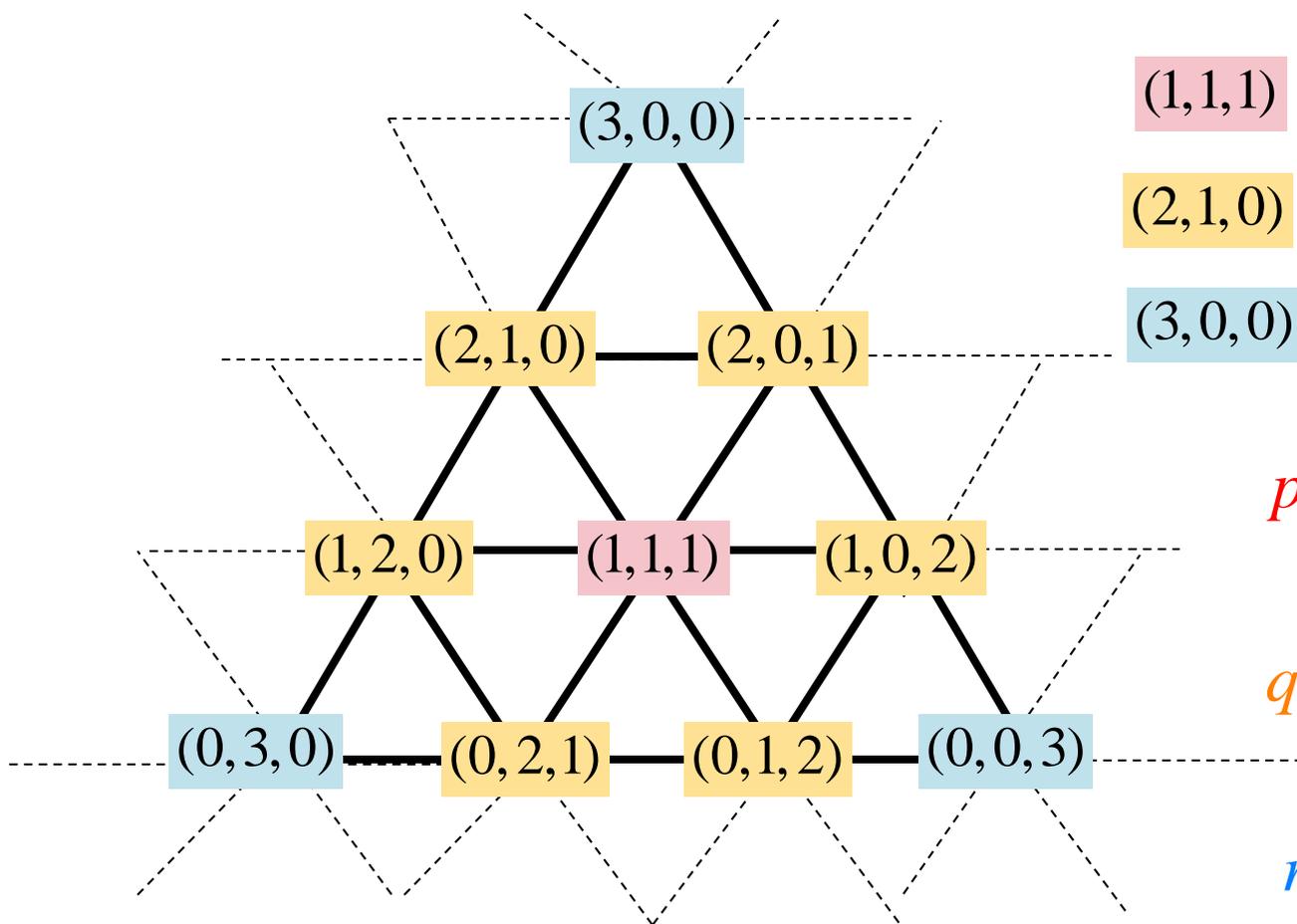
全て $\frac{1}{9}$ の確率で移動



同じ値は
元に戻る

すごろくで不公平の理由を探る

十分に時間が経てば、各状態にいる確率は変化しない



(1,1,1) にいる確率 p

(2,1,0) にいる確率 q

(3,0,0) にいる確率 r

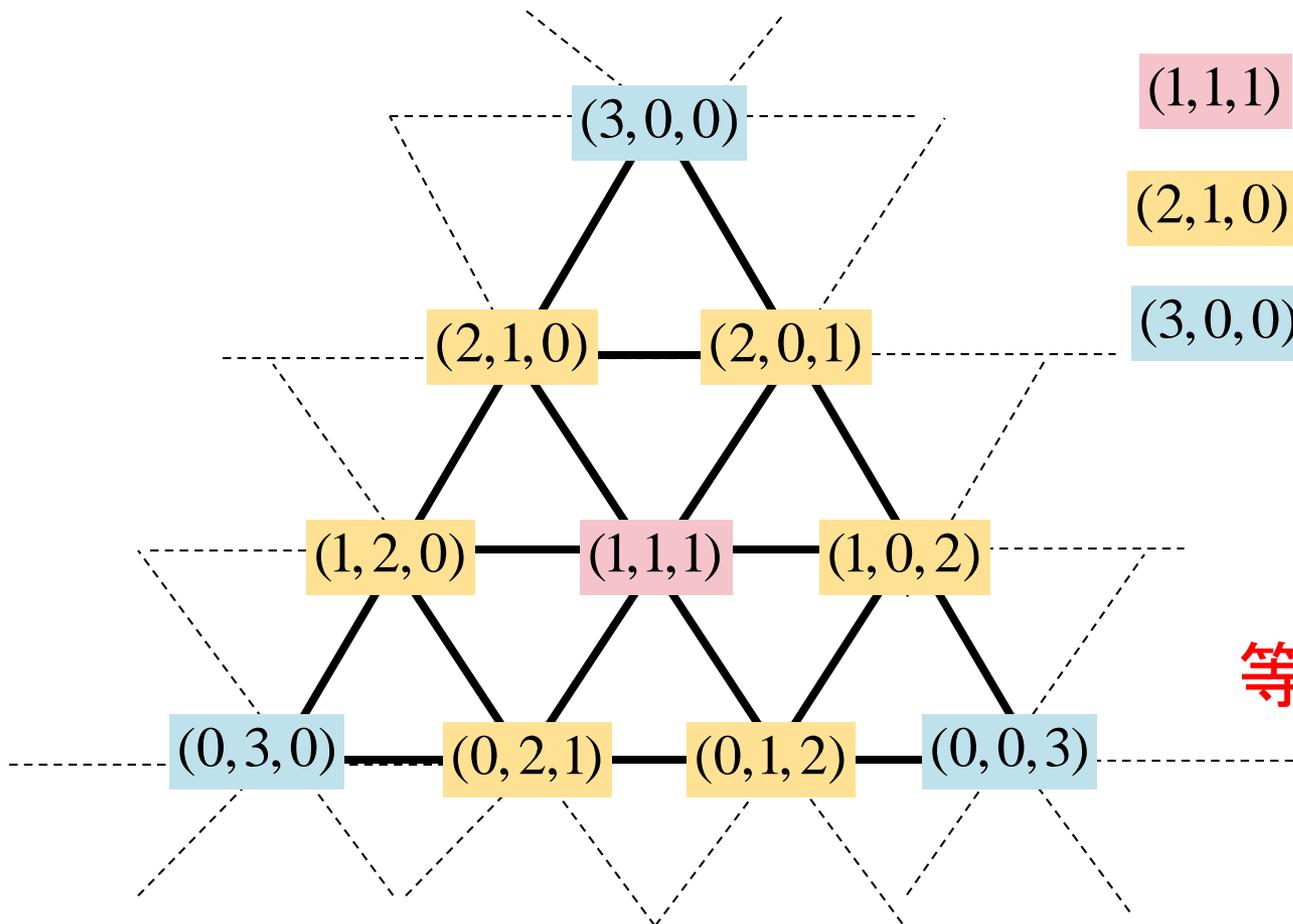
$$p = \frac{3}{9}p + \frac{6}{9}q$$

$$q = \frac{1}{9}p + \frac{7}{9}q + \frac{1}{9}r$$

$$r = \frac{2}{9}q + \frac{7}{9}r$$

すごろくで不公平の理由を探る

十分に時間が経てば、各状態にいる確率は変化しない



(1,1,1) にいる確率 p

(2,1,0) にいる確率 q

(3,0,0) にいる確率 r

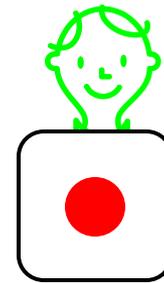
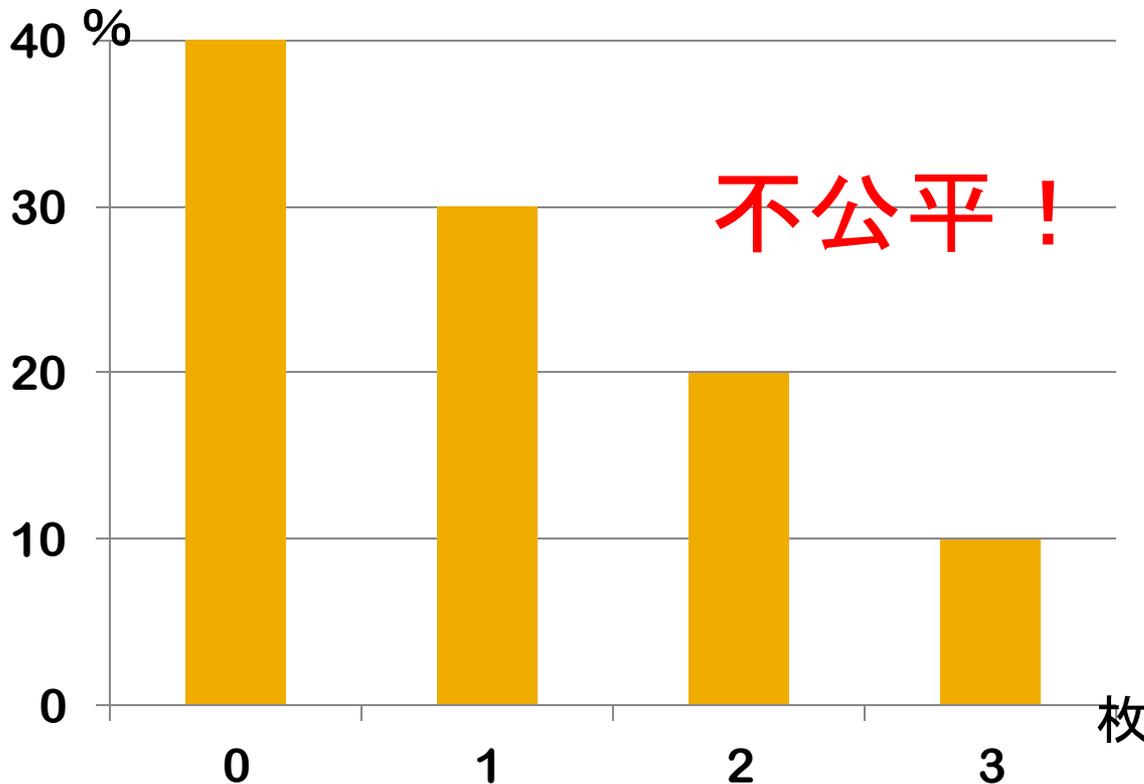
$$p = q = r$$

全ての状態に
等しい確率で存在

$$\frac{1}{10}$$

すごろくで不公平の理由を探る

十分に時間が経てば、各状態にいる確率は等しい
ある枚数のチップを持つ確率



$$\frac{1}{10}$$

がある枚数の
チップを持つ確率

$$0 \text{ 枚} : \frac{4}{10} = 40\%$$

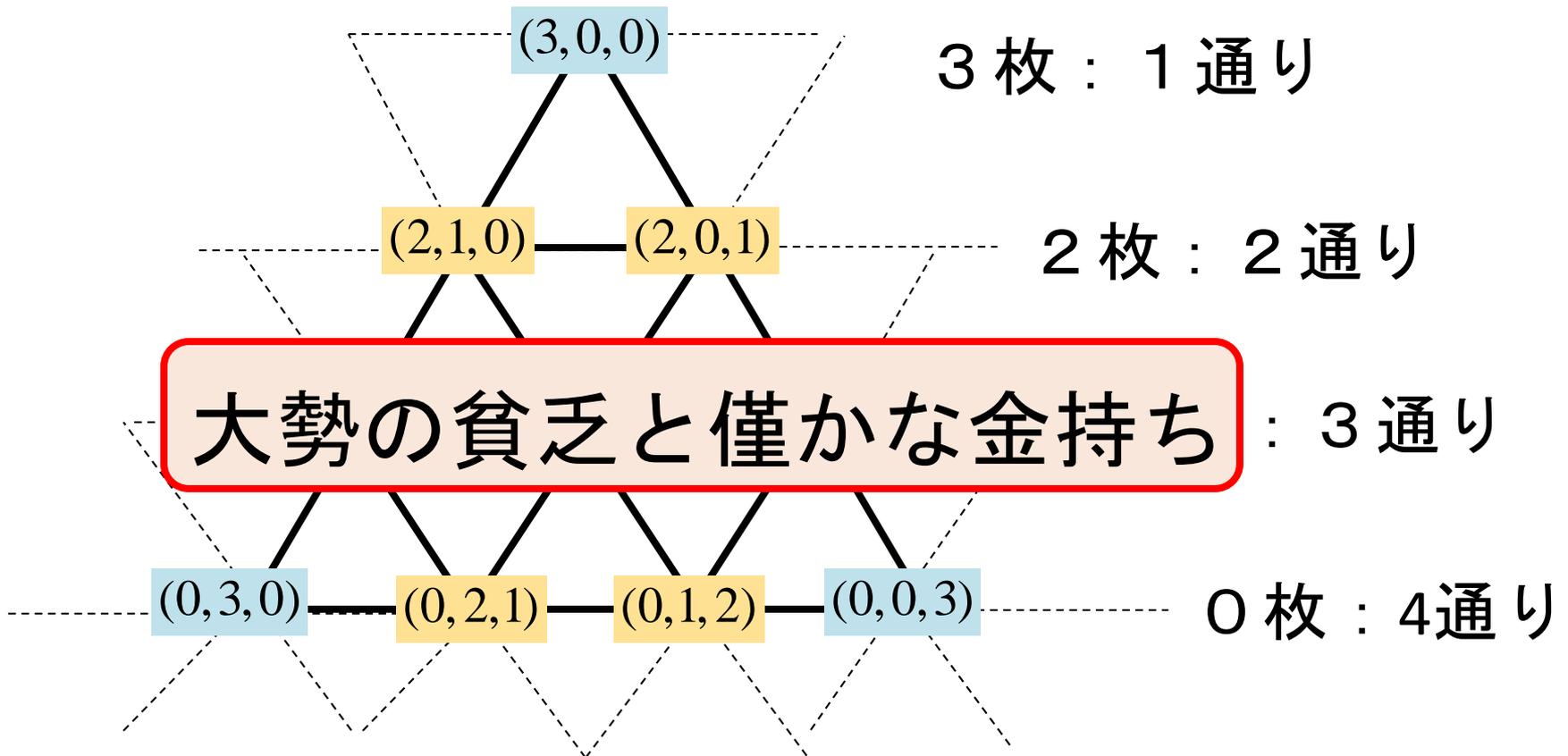
$$1 \text{ 枚} : \frac{3}{10} = 30\%$$

$$2 \text{ 枚} : \frac{2}{10} = 20\%$$

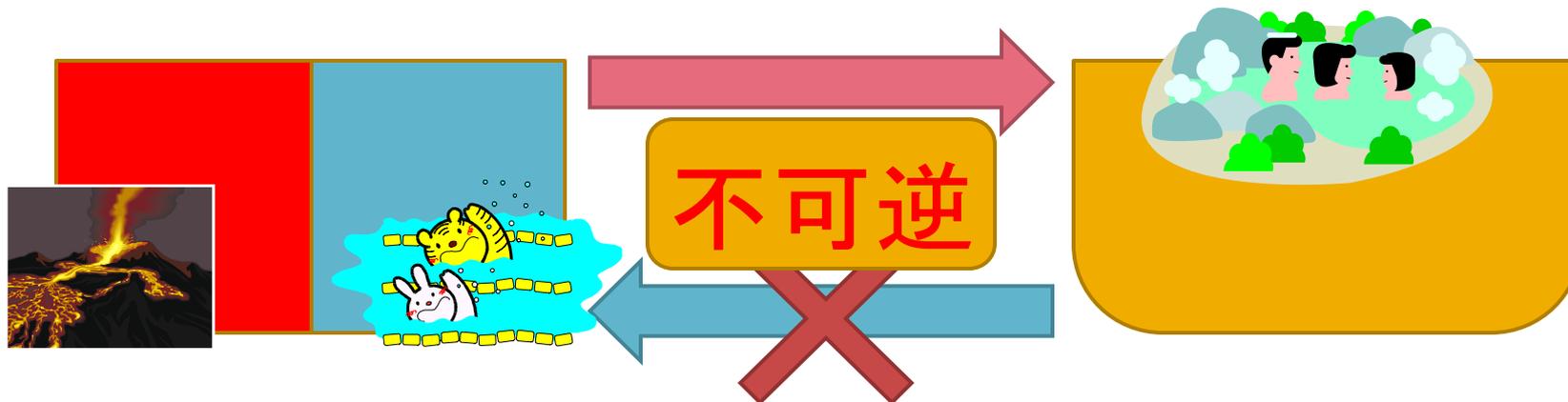
$$3 \text{ 枚} : \frac{1}{10} = 10\%$$

自分が貧乏なら皆で分けあえる

自分のチップの枚数が少なければ、
他の人がチップを分けあう組み合わせの数は多くなる



場合の数とエントロピー増大則



2人で
4枚のチップ

2人で
2枚のチップ

4人で
6枚のチップ

15通り \times 6通り = 90通り $<$ 210通り

組み合わせの数が多い方に行きやすい!



エントロピー増大則



まとめ



- ・サイコロを使ってチップのやりとりをすることで、分子のエネルギー交換を模倣して、**分子が持つエネルギーの分布**を知ることができた！
- ・サイコロを使ってチップをやりとりすると、チップが公平に分配されるのではなく、**不公平に大勢の貧乏と僅かな金持ち**になることが分かった！
- ・**組み合わせの数が多い方**に状態は変化する！
エントロピーの増大とは、組み合わせの数が増えることで、**不可逆性**が現れる！