マシュー方程式によるヴィブラートの表現

明治大学 総合数理学部 現象数理学科 池田幸太 研究室 4年

背景と目標

作成者はヴァイオリン奏者であり, 始めて10年経った現在でも満足な演奏ができず, 技術面で伸び悩んでいる. そこで, 楽器の技術向上につながるような研究をしたいと思案した.

ヴィブラートを含む音声信号のモデルとして微分方程式モデルを提案している研究が存在.

微分方程式モデルで自身が奏でるヴィブラートの表現をしたい.

先行研究：早川 大智、安藤 繁 著.
『微分方程式モデルに基づく音響センシングと信号処理に関する研究』.
2019/11/19. 情報処理学会研究報告.

モデル

今回のモデルは物理的な音の発生(弦の振動や声道の振動)から考えられており, ヴィブラートと音圧の関係を示す項を加えている.
ヴィブラートによって周波数が正弦的に変動する場合, 音圧の変化も正弦的に変動すると近似できる.

振幅(音圧)を表す項　周波数(音程)を表す項

ヴィブラート：音を一定時間伸ばす際に, 基準の音程から音程を上下に振動させる演奏技法.

$$\boldsymbol{f''_m(t) + \underbrace{k_m\cos(\alpha t+\psi_m)\,f'_m(t)}_{\text{振幅(音圧)を表す項}} + \underbrace{a_m^2(1+\epsilon_m\cos(\alpha t+\phi_m))f_m(t)}_{\text{周波数(音程)を表す項}} = 0} \quad (1)$$

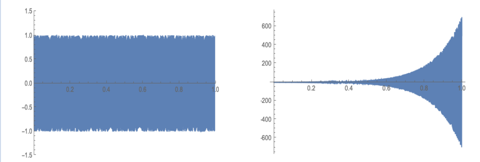
f_m: m番目の調波成分(音程)
k: 振幅の変調の大きさ ψ: 振幅の変調の初期位相
α: ヴィブラートの速さ(角振動数) a: 固有周波数
ϕ: ヴィブラートの振動の初期位相
ϵ: 周波数の変調の大きさ

(1)で$\boldsymbol{k=0}$として考えた式

$$\boldsymbol{f''_m(t) + a_m^2(1+\epsilon_m\cos(\alpha t+\phi_m))f_m(t) = 0}$$

はブランコの運動などで使われる係数励振系の運動方程式の１種である**マシュー方程式**の形になっている.

パラメータの周期的な変動によって, ヴィブラートによる変化などの細かい波形の表現ができる.



(a) $a = 880\pi, \epsilon = 0.01$
$\alpha = 12\pi, \phi = 0$

(b) $a = 880\pi, \epsilon = 0.01$
$\alpha = 1760\pi, \phi = 0$

- $k=0$であるということは振幅(音圧)の項を考えない.
- (a)の波形は$\boldsymbol{a \ll \alpha}$の時に生成され, 角振動数$\boldsymbol{\alpha}$の速さで固有振動数$\boldsymbol{a}$が周期的に変化することを表している.
- (b) の波形は$\boldsymbol{\alpha = 2a}$のときに生成され、音の立ち上がりや止む直前などの表現に役立つ.

パラメータ推定

パラメータ推定の手順
1. 推定手法の決定 2. 代数方程式の導出
3. 未知パラメータの導出

Step1: 区間[0,T]において各$\boldsymbol{f_m}$がモデルの式に従う場合、式の両辺に荷重関数$e^{-jn\Delta\omega t}$(nは整数, $\Delta\omega = 2\pi/T$, jは虚数単位)を乗じて[0,T]で積分した

$$\boldsymbol{\int_0^T \{f''_m(t) + k_m\cos(\alpha t+\psi_m)\,f'_m(t) + a_m^2(1 + \epsilon_m\cos(\alpha t+\phi_m))f_m(t)\}\, e^{-jn\Delta\omega t}\,dt = 0} \quad (2)$$

も$\boldsymbol{n}$ごとに成り立つことを利用する.（荷重積分法）

Step2:

$g_n = \int_0^T f(t)e^{-jn\Delta\omega t}\,dt,$

$p = \alpha/\Delta\omega,$ (分析区間がヴィブラートの周期のp倍)

$c_{n,p} = g_{n-p} + g_{n+p},$

$d_{n,p} = g_{n-p} - g_{n+p},$

$F_0 = f(T) - f(0),\ F_1 = f'(T) - f'(0),$

とおくと, 以下の代数方程式に変換できる.

$$\boldsymbol{AB = n^2\Delta^2\omega\ g_n.} \quad (3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ jn\Delta\omega \\ j\Delta\omega(nc_{n,p} - pd_{n,p}) \\ \Delta\omega(-nd_{n,p} + pc_{n,p}) \\ g_n \\ c_{n,p} \\ jd_{n,p} \end{bmatrix}' \qquad B = \begin{bmatrix} F_1 + kF_0\cos\psi \\ F_0 \\ \frac{k}{2}\cos\psi \\ \frac{k}{2}\sin\psi \\ a^2 \\ \frac{a^2\epsilon}{2}\cos\phi \\ \frac{a^2\epsilon}{2}\sin\phi \end{bmatrix}$$

- Aは音声データをフーリエ変換することによって得られる.
- Bは4つ以上のnにおける(3)式を連立し、最小二乗法で解くことによって得る.

Step3: 最小二乗法によって得られたBの要素を上から順にそれぞれ$b_i (1 \le i \le 7)$とおくと、

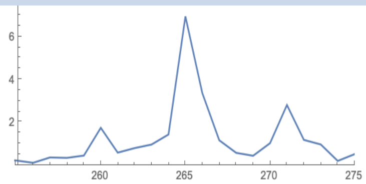
$$\boldsymbol{F_0 = b_2,\ F_1 = b_1 - 2b_2b_3,\ k = 2\sqrt{b_3^2 + b_4^2},\ a = \sqrt{b_5},}$$

$$\boldsymbol{\psi = arg(b_3 + jb_4),\ \epsilon = 2\sqrt{b_6^2 + b_7^2}/b_5,\ \phi = arg(b_6 + jb_7)}$$

で, 未知パラメータ$k, a, \psi, \epsilon, \phi$が求まり, モデルに値を与えると波形が描写できる.

実験結果

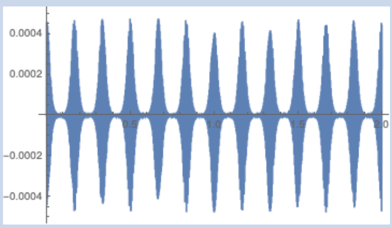
実験手順
1. 音源の周波数のピークを調べる.　2. パラメータ推定をし, モデルに値を与えてプロットする.



- 聴覚上の主観で, 音源のヴィブラートが綺麗にかかっている1秒間を取り出してフーリエ変換をした.
- ピーク(値が大きい箇所)を調べたところ, 265Hz(ドの音)がピークであることが分かった.
- 260と271の値も少し大きくなっており, 265との差がヴィブラートの振動数を表している.

　⇒ ヴィブラートが感知できている.

- 今回は260より271の方が値が大きいため, ヴィブラートの振動数を6Hz($p=6$)とした.



- パラメータ推定をし, 微分方程式モデルにパラメータの値を代入して解いた. その際, 初期値を$f(0) = 0, f'(0) = 1$ に設定した.
- $t = [0, 2]$の区間に設定してプロットしたものが左図である. 波形の振幅がわずかだが変動していることが見て取れる.

ヴィブラートを表現することができた.

結論

目標：微分方程式モデルで自身が奏でるヴィブラートの表現をしたい.

マシュー方程式に基づく微分方程式モデルおよび荷重積分法によるパラメータ推定によって, ヴィブラートの表現をすることができた.