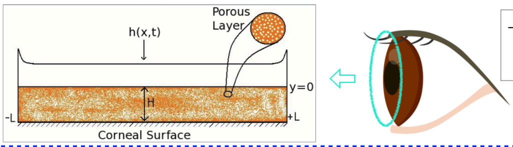
金平糖における角の形態形成メカニズムについての数理モデルの構築及び解析

明治大学大学院 先端数理科学研究科 現象数理学専攻 博士前期課程2年

1. 背景

世の中には, 薄い膜における現象が数多くある.

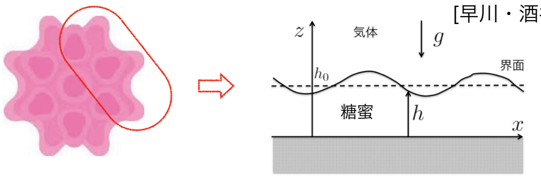


→ 角膜表面を覆う涙の界面の挙動の研究

[Kumnit-Daniel 2010]

金平糖の角形成メカニズムもこの現象である.

[早川・酒井 2007]



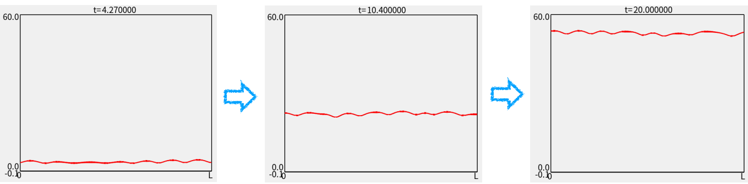
糖蜜界面の挙動に着目→金平糖の角形成について議論.

この現象は, 以下の数理モデルで記述出来る.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -c_2 \nabla^2 h - c_4 \nabla^4 h + v_0\left(1 + \frac{1}{2}(\nabla h)^2\right) + F$$

c_2：角形成の効果, c_4：平坦化の効果 v_0：界面の速度, F：糖蜜の授受

Q, 本当に再現出来ているのか？



A, 角形成メカニズムを再現出来ている.

→ しかし, 早川氏, 酒井氏は導出過程を示していない.

“どのように正しいのかという点が不明！”

2. 目標

(i) 薄膜近似を適用することで導出過程を明確にし, 薄膜近似の観点から妥当なモデルを構築する.

(ii) 先行研究のモデルと構築した数理モデルの相違点を検討し, 数値計算結果を示す.

3. 数理モデルの構築

基礎方程式

以下の7種類の式が必要.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$ 非圧縮性条件

$$u = w = 0$$ 滑りなし条件 $(z=0)$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \rho g\frac{\partial h}{\partial x}$$ Navier-Stokes eq. のx成分

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) - \rho g$$ Navier-Stokes eq. のz成分

$$\mu\left(1 - \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + 2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$ 接線方向の力のつり合いの式 $(z=h)$

$$-p + \frac{2\mu}{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} - \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial x}\right] = \gamma\frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$ 法線方向の力のつり合いの式 $(z=h)$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} - w = -\xi\frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$ 運動学的条件 $(z=h)$

これら7式のままモデルの構築は**複雑で難しい**.

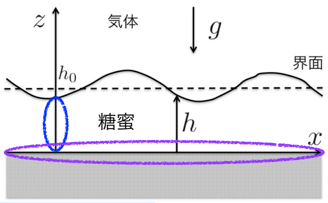
⇩

議論しやすいように, これら7式を**簡略化**したい.

⇩

薄膜近似をこれら7式に適用する.

4. 薄膜近似



厚さのスケール<面積のスケール の場合に適用可能.

⇩

糖蜜界面での現象に適合するように変数変換を施す.

Step1. 元々の式

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} - w = -\xi\frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

以下の**変数変換を適用！**

$$x = \frac{h_0}{\varepsilon}X \quad t = \frac{h_0}{\varepsilon u_0}T \quad h = h_0 H$$
$$u = u_0 U \quad w = \varepsilon u_0 W \quad \xi = \frac{u_0 h_0}{\varepsilon}\Xi$$

Step2. 変数変換後の式

$$\varepsilon u_0\frac{\partial H}{\partial T} + \varepsilon u_0 U\frac{\partial H}{\partial X} - \varepsilon u_0 W = -\varepsilon u_0 \Xi\frac{\partial^2 H}{\partial X^2}$$

→ εの最低次項のみ議論する.

Step3. 最終的な式

$$\frac{\partial H}{\partial T} + U\frac{\partial H}{\partial X} - W = -\Xi\frac{\partial^2 H}{\partial X^2}$$

残り6つの式にも適用.

⇩

圧力P, 流速U, Wを求める.

⇩

Step3に代入する.

⇩

モデル完成！

→ 複雑だった式が簡単な形で表せた！

新たな角形成メカニズムの数理モデル

$$\frac{\partial H}{\partial T} = -\Gamma\left(\frac{H^2}{2}\frac{\partial^3 H}{\partial X^3}\frac{\partial H}{\partial X} + \frac{H^3}{3}\frac{\partial^4 H}{\partial X^4}\right) - \Xi\frac{\partial^2 H}{\partial X^2}$$

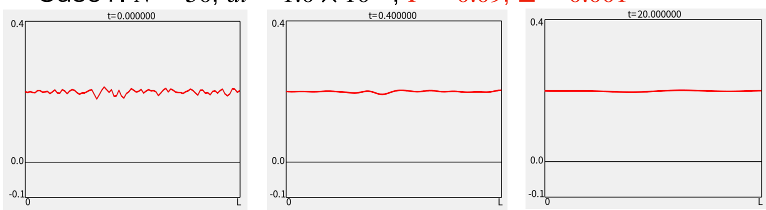
Γ：表面張力係数 Ξ：曲率による係数

→ 糖蜜界面の高さの挙動に限定したモデルの構築に成功！

5. 数値計算

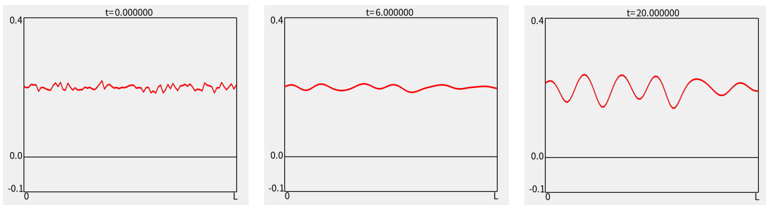
Q, 新モデルでも再現出来るのか？

Case1. $N = 50,\ dt = 1.0 \times 10^{-3},\ \Gamma = 0.09,\ \Xi = 0.001$



ΓとΞの差が大きい→角が形成されない.

Case2. $N = 50,\ dt = 1.0 \times 10^{-3},\ \Gamma = 0.02,\ \Xi = 0.005$



ΓとΞの差が小さい→角が形成される.

A, 新モデルでも, 再現に成功した.

角の形成は, Ξ**に依存する**ことが分かった.

先行研究のモデルと同様な結果が得られると分かった！

6. 結論

(i) 薄膜近似を適用し, 導出過程を明確に示したことで, 理論的に不明な点がないモデルの構築に成功した.

(ii) 先行研究モデル同様, 新モデルでも再現可能であり, より妥当性が高いと数値計算結果より示せた.