パン焼成中の移動境界モデル

明治大学 総合数理学部 現象数理学科 4年

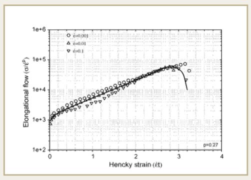
導入

松本博，パン膨脹についての基礎的な諸研究，(1981)，調理科学，14巻4号.
Roger I. Tanner, Fuzhong Qi, Shao-Cong Dai, Bread dough rheology and recoil I. Rheology，(2008)，Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics，Volume 148, Issues 1–3.
J. Zhang, A.K. Datta，Mathematical modeling of bread baking process，(2006)，Journal of Food Engineering，Volume 75, Issue 1.

先行論文
・粘弾性の特徴を張力でモデル化
・応力と圧力のLodgeモデル
・多孔質体の特徴をエネルギーでモデル化

問題点
・実際の挙動を表現できていない
・実験データを説明するためのモデル

改善策
物理法則を用いて表現する



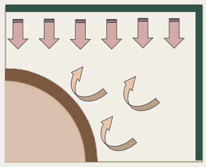
目標

パンの焼成において水分量の変化がないときの移動する境界の挙動を予測する.

温度と水分量の変化を用いた移動境界モデル

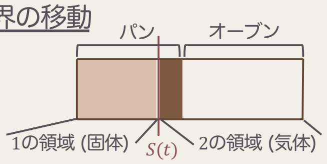
Emmanuel Purlis , Viviana O. Salvadori，Bread baking as a moving boundary problem. Part 1: Mathematical modelling，(2009)，Journal of Food Engineering，Volume 91, Issue 3
Emmanuel Purlis , Viviana O. Salvadori，Bread baking as a moving boundary problem. Part 2: Model validation and numerical simulation(2009)，Journal of Food Engineering，Volume 91, Issue 3

パン内部の**クラムとクラストの境を境界S**とみなし, 温度と水分の変化を用いて**境界の移動する挙動を予測**する.
表面の位置は固定され, 体積変化は考慮しない. 熱や水分などの物理量は相変化を含む連続関数である.



境界条件

境界の移動



境界の移動速度　オーブン内の熱の流出入量　クラム内の熱の流出入量

$$\lambda\frac{\partial S}{\partial t}=k_2\frac{\partial T_2}{\partial x}-k_1\frac{\partial T_1}{\partial x}$$

境界での温度

熱対流　熱輻射

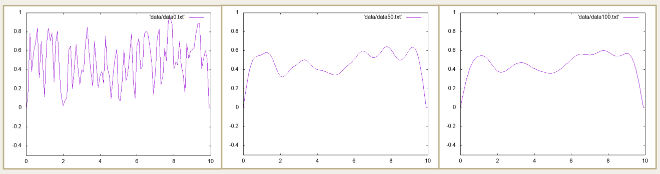
$$-k\nabla T=h(T_S-T_\infty)+\varepsilon\sigma(T_S^4-T_\infty^4)$$

温度勾配　表面温度　オーブンの端の温度

支配方程式

$$\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}=\nabla\cdot(k\nabla T)\,,\quad \frac{\partial W}{\partial t}=\nabla\cdot(D\nabla W)$$

$$C_p=C_{p_d}+WC_{p_w}+\lambda W\eta$$



x：位置 [m]
t：時刻 [s]
T：温度 [K]
ρ：密度 [kg m^{-3}]
C_p：比熱 [J kg^{-1} K^{-1}]
k：熱伝導率 [W m^{-1} K^{-1}]
W：水分量
D：水の拡散係数 [m^2 s^{-1}]
λ：相転移熱 [J m^{-3}]
η：デルタ型関数
S：境界の位置 [m]
1：固体領域
2：気体領域
h：熱伝達率 [W m^{-2} K^{-1}]
ε：放射率
σ：ステファンボルツマン定数 [W m^{-2} K^{-4}]

水分量一定の移動境界モデル

パンの焼成中において**水分量を**各領域ごとに**一定と仮定**し, 温度変化にのみ着目して**境界の挙動を予測**する.
先行研究を元に仮定を加え, モデルを変更する.

仮定
・水分量を固体領域で0.8, 気体領域で0.5
・デルタ型関数を考慮しない
・変数の定義域を境界の位置で分ける
・熱輻射の影響を考慮しない
・その他変数は先行研究に従う

支配方程式

$$\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}=\nabla\cdot(k\nabla T)\,,\quad \boldsymbol{W}=\begin{cases}\boldsymbol{0.8}\ (x\le S)\\ \boldsymbol{0.5}\ (x>S)\end{cases}$$

$$\boldsymbol{C_p=C_{p_d}+WC_{p_w}}$$

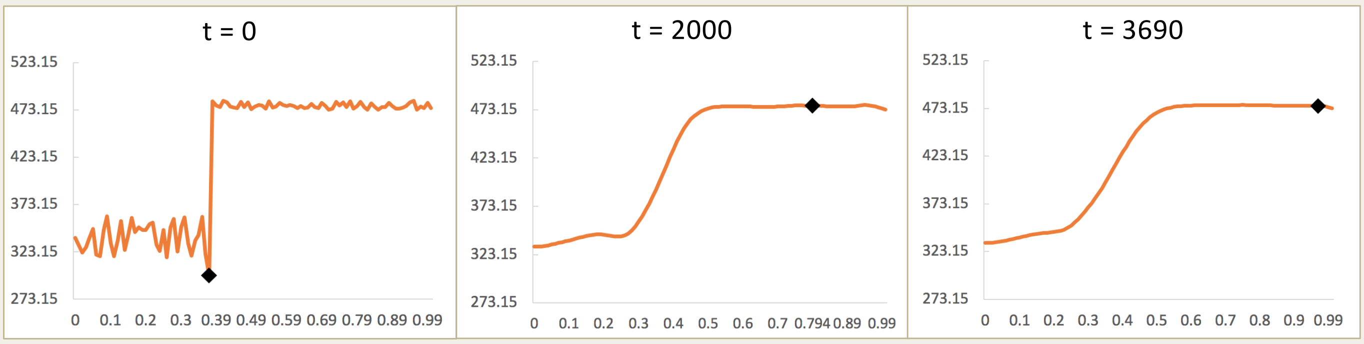
境界条件

$$\lambda\frac{\partial S}{\partial t}=k_2\frac{\partial T_2}{\partial x}-k_1\frac{\partial T_1}{\partial x}$$

$$\boldsymbol{-k\nabla T=h(T_S-T_\infty)}$$

数値シミュレーション

初期条件　Sの位置：0.374[m], オーブンの長さ：1[m]，パン内部：25~75[℃], オーブン内部：180~190[℃], オーブンの端：200[℃]



結果　時刻が進むにつれ, 熱の拡散によりグラフが滑らかになっている. また, 境界が徐々に右に移動している. すなわちパンの表面を超えてクラストの境界が右側にある. 境界の初期位置より内側では温度の上昇が少なく, 100℃を超えていない.

結論

各領域ごとに水分量を一定値とすると**境界の移動に影響が出る**ことがわかった.
水分が程よく減少することで適度な厚さのパン耳になると考えられる.
しかし, **膨張についてのモデルではないので本研究のモデルに誤りがある.**