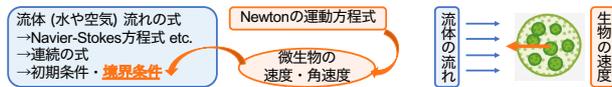


二匹の球形微生物の運動モデルに対するALEの適用

明治大学 総合数理学部 現象数理学科 4年 池田研究室

1. 研究背景

Q. 微生物の運動をどのように理解するか?



A. 流体流れの式の境界条件に微生物の情報を組み込む

● 先行研究

[1] Blake (1971), [4] Ishimoto (2013), [5] Rao (1988)
球形微生物の運動を流体力学的に解析する研究のうち、直近では石本氏が非定常Stokes流れにおいて、**球形微生物一匹**の運動を解析的に解いている[4].

支配方程式 (非圧縮Navier-Stokes方程式, 連続の式)

$$\begin{cases} \rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

生物の体長 L , 生物の初期速度 U , 生物の周期運動の振動数 ω で無次元化

$$\begin{cases} R_\omega \partial_t \mathbf{u} + \text{Re}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

$\text{Re} \ll R_\omega, \text{Re} \ll 1$ と仮定し, $\text{Re} \approx 0$ と近似

非定常Stokes方程式

$$\begin{cases} R_\omega \partial_t \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

振動Reynolds数 $R_\omega = \frac{\rho L^2 \omega}{\mu}$

初期条件 (流れ関数 ψ に対する)

$$D^2 \psi_0(r, \theta, t) = 0$$

境界条件 (自由境界)

$$\mathbf{u}(R(\theta), \theta(\theta))|_{\partial \Omega} = (\dot{R}, R\dot{\theta})$$

$$R(\theta) = 1 + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) Q'_n(\mu)$$

$$\theta(\theta) = \theta + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{\sqrt{1-\mu^2}} \beta_n(t) Q_n(\mu)$$

注) $Q_n(\mu)$ はLegendre多項式の原始関数

Squirmerモデルの導入

自由境界を扱うのは難しいので, 生物の速度 $V(t)$ と以下の生物の表面速度を与える.

$$u_r(r=1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \frac{\partial Q_n(\mu)}{\partial \mu}, \quad u_\theta(r=1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{\sqrt{1-\mu^2}} B_n(t) Q_n(\mu)$$

解析解の導出 流れ関数 ψ と圧力場 p がラプラス変換した解として求まる[5].

現状

支配方程式に時間微分項が残っている場合には, 複数体の球形微生物の運動は考えられていない

● 先行研究からの変更点

先行研究	本研究
球形微生物一匹	球形微生物二匹
非定常Stokes方程式	Navier-Stokes方程式
自由境界で表現	ALEを適用し, 移動境界で表現

2. 目標

- Navier-Stokes方程式にALEを適用
- 球形微生物二匹の運動にみられる特徴を確認

3. 数理モデル

● 球形微生物の運動モデル [4]

$$\begin{cases} \rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (\text{非圧縮Navier-Stokes方程式})$$

(連続の式)

生物の体長 L , 生物の初期速度 U で無次元化
($x \rightarrow \frac{x}{L}, t \rightarrow \frac{t}{L} U, \mathbf{u} \rightarrow \frac{\mathbf{u}}{U}, p \rightarrow \frac{pL}{\mu U}$)

$$\begin{cases} \text{Re}(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

Reynolds数 $\text{Re} = \frac{\rho UL}{\mu}$

初期条件

$$\mathbf{u}_0 = (1, 0), p_0 = 0$$

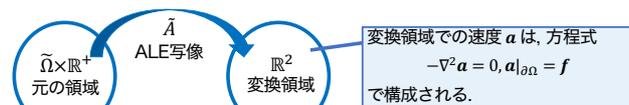
境界条件 (移動境界)

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \quad \text{on } \partial \Omega(t)$$

注) \mathbf{U} は境界の移動速度

● ALE (Arbitrary Lagrangian, Eulerian) [2], [3]

時々刻々と移動する境界を追跡するためにALE写像を $\tilde{A}: (\tilde{x}, t) \in \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ と定義し, この写像により変数変換した領域を与えた.



Navier-Stokes方程式にALEを適用して境界を表した

4. 数値計算

● 計算領域

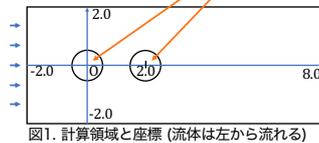


図1. 計算領域と座標 (流体は左から流れる)

表1. 計算領域の境界条件

境界	条件	数式
左の生物表面	粘着境界	$\mathbf{u} = (0, 0)$
右の生物表面	移動境界	$\mathbf{u} = \mathbf{a}$
左壁	流入境界	$\mathbf{u} = (1 - y^2, 0)$
上壁, 下壁	滑り境界	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$
右壁	流出境界	$2\mu \mathbf{E}(\mathbf{u}) \mathbf{n} = p \mathbf{n}$

● パラメータ

表2. パラメータの大きさ

流体密度 ρ [kg/m ³]	粘性係数 μ [Pa · s]	生物の体長 L [m]	生物の初速度 U [m/s]	Reynolds数 Re	境界での速度 f [m/s]
1.0×10^2	1.0×10^{-3}	1.0×10^{-3}	1.0×10^{-4}	1.0×10^{-2}	$(0.40 \cos(\pi/2)t, 0.40 \sin(\pi/2)t)$

低Reynolds数

● 計算結果

回転運動という周期的な移動を与えた。球形微生物二匹のうち, 左側の微生物を固定して, 右側の微生物が反時計回りに回転する場合を計算した。回転運動は境界での速度 f (表2)を与えることにより表現した。結果には速度場 \mathbf{u} と圧力場 p を同時に表示した。着色部分が速度場, 曲線が圧力場の等高線である(図2, 3, 4).

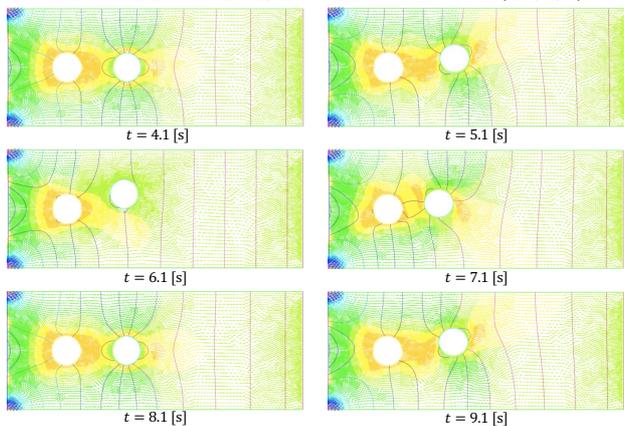


図2. 左側の微生物を固定し, 右側の微生物が反時計回りに回転する場合の速度場と圧力場

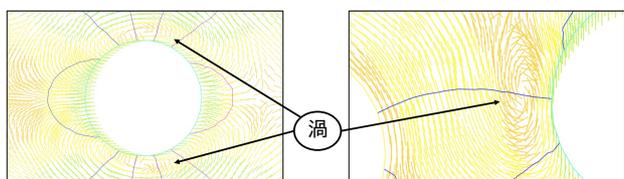


図3. 図2の $t = 4.1$ [s]の拡大図

図4. 図2の $t = 7.1$ [s]の拡大図

- 間隔 $\Delta t = 4.0$ [s]の周期的な速度場, 及び圧力場が出現
- $t = 4.1$ [s]において, 右側の微生物の周りに渦が発生
- $t = 7.1$ [s]において, 左右の微生物の間に渦が発生

5. 結論・今後の課題

● 結論

- Navier-Stokes方程式にALEを適用して, 移動境界として境界を表現できた
- 球形微生物二匹の運動に対し, 周期的な解, 微生物周り及び間における渦の発生という特徴が現れた

● 今後の課題

- ALEを適用して, 自由境界として境界を表現する
- 数値解の妥当性を定量的にみる
- 二匹の微生物の運動を自由境界で表現する

参考文献

- [1] J. R. Blake, "A spherical envelope approach to ciliary propulsion", J. Fluid Mech. (1971), vol. 46, part 1, pp. 199-208.
- [2] A. Decoene, B. Maury, "Moving meshes with freeform+", Journal of Numerical Mathematics, (2012), vol. 20, issue 3-4, pp.195-214.
- [3] Yannick Deleuze, "Modeling and simulation of transport during acupuncture", HAL open science, (2016).
- [4] Kenta Ishimoto, "A spherical squirmer in unsteady Stokes flow", J. Fluid Mech. (2013), vol. 723, pp. 163-189.
- [5] R. M. Rao, "Mathematical model for unsteady ciliary propulsion", Mathl. Comput. Modelling, (1988), vol. 10, No. 11, pp. 839-851.
- [6] 大塚厚二, 高石武史 『有限要素法で学ぶ現象と数値 -FreeFem++ 数値思考プログラミング-』 共立出版, (2014).