周期外力による物体の振動現象を再現する数理モデル

明治大学 総合数理学部 現象数理学科4年 [redacted]

研究背景

リーフスプリングサスペンション :トラックの地面からの衝撃を緩和させる
タイヤと車体を繋ぐ重ね板ばねとシャックル

- **特徴1**
  高荷重に対して耐性がある
- **特徴2**
  ばね定数, 減衰係数が一定でない

赤く囲った場所がリーフスプリング
サスペンションで右側にシャックルがある

リーフスプリングサスペンションはトラックの乗り心地に関して
重要な役割を持っている.

➡ リーフスプリングサスペンションの振動を表すモデルを立てることができれば, 乗り心地の良いトラックの製造が可能になる.

目標

振動現象を再現する数理モデルが実験結果を再現できているか確かめる.

実験の振動について理解するために相平面の軌道と周波数の解析を行った.
今回は加振機が小さかったため, 小さい物で実験を行った.

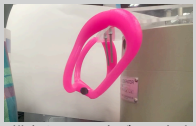
実験

- **実験で使用した物体**
  つる巻きばね
  ゲル状の物質 3種類 ➡ 八の字型のゲル / 柔らかい手の形のゲル / 硬い手の形のゲル
- **実験で使用したもの**
  アクリル板
  加振器

実験で使用した加振機. 中心のネジ穴が
5つある銀色の部分が上下に振動する

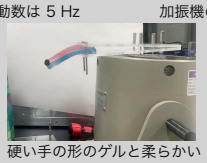
- **実験の方法**
  アクリル板で実験材料を挟んで
  加振機に固定し, 加振機の振幅と振動数を設定した.
  物体の黒い点を60FPSのビデオで15秒間撮影した.

縦向きの八の字ゲルの実験
加振機の振動数は 5 Hz



横向きの八の字ゲルの実験
加振機の振動数は 6 Hz

柔らかい手の形のゲルの実験
加振機の振動数は 4 Hz

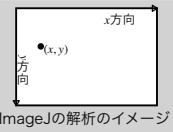


硬い手の形のゲルと柔らかい
手の形ゲル二枚重ねた実験
加振機の振動数は 6 Hz

つる巻ばねの実験
加振機の振動数は 7 Hz

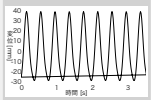
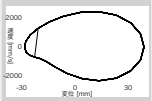
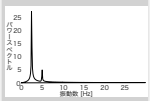
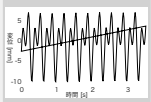
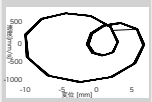
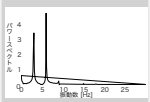
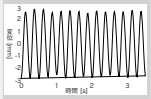
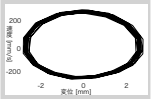
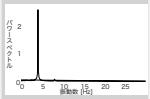
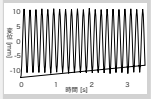
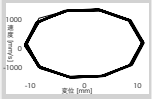
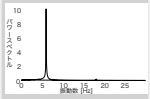
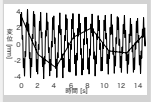
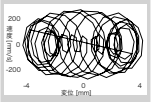
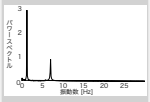
実験結果と解析方法

- **実験結果**
  1. ffmpegを用いて動画を1秒間に60枚の画像に分割した.
  2. 分割された画像の黒い点の座標をImageJで取得した.
  3. すべての座標を平均した値で引いて1/12秒間で移動平均を取った.
  4. x方向, y方向で変位が大きい方を使用し,
     時間-変位のグラフをプロットした.
- **解析方法**
  相平面の軌道の解析と周波数解析を行った.



ImageJの解析のイメージ

実験結果と解析結果

	実験結果	相平面の軌道の解析	周波数解析	結果
縦向きの ゲルの実験				5Hz の加振機の 振動と2.46Hz の 物体の固有の振
横向きの ゲルの実験				6Hz の加振機の 振動と3Hz の 物体の固有の振
柔らかい 手の形の ゲルの実験				4Hz の加振機の 振動
手の形を二枚 重ねた ゲルの実験				6Hz の加振機の 振動
つる巻ばねの 実験				7Hz の加振機の 振動と1.28Hz の 物体の固有の振

モデルのフィッティング

単振動の運動方程式に周期振動の外力を加えたモデルを使用し,
物体の固有の振動と加振機の振動が表れた実験結果をフィッティングした

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x} = \frac{F}{m} \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

単振動　外力項

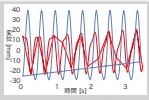
x :変位, m :物体の質量, ω_0 :物体の固有振動数
ω :加振器の振動数, ϕ :位相のずれ, F :荷重

$$\Rightarrow x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{F}{m} \cdot \frac{\cos(\omega t + \phi)}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

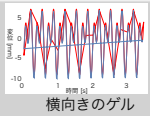
物体に関する項　加振機に関する項

C_1, C_2 :積分定数

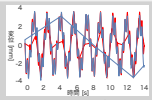
ω_0 のパラメータは周波数解析結果の物体の固有振動数を代入した.
F/m, ϕ, C_1, C_2 のパラメータはMathematicaの非線形回帰で推定した.
モデルの計算結果と実験結果を同一のグラフでプロットした.



縦向きのゲル



横向きのゲル



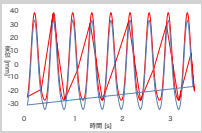
つる巻きばね

モデルの結果
実験結果

横向きのゲルとつる巻きばねはフィッティングが上手くいった.
しかし, 縦向きのゲルは上手くいかなかった.

縦向きのゲルの変位とω_0のとり方を変えた

- ImageJ の座標の最大値と最小値の平均を基準の座標とし, すべての時刻から基準の座標を引いて移動平均を取ったものを新しい変位にした
- F/m, ϕ, C_1, C_2, ω_0 をパラメータとしてMathematicaで非線形回帰した.



モデルの結果　実験結果
新しい変位とω_0で縦向きのゲル

- モデルの計算結果が実験結果とほとんど一致した
- 今回のω_0は2.49Hz だったので周波数解析結果は間違っていなかった.
- 今回のモデルは実験を表すことができた.

結果と今後の課題

目標
振動を再現する数理モデルが実験結果を再現できているかどうかを確かめる.

結論
フィッティングの結果からモデルは現象を表すことができた.

- **今後の課題**
  ばね定数が変化するような物体も再現できるモデルを考える.