新型コロナウイルス感染症の数理モデル　に対するリアプノフ関数

総合数理学部　現象数理学科　４年

1. 背景

現在、新型コロナウイルス感染症(COVID-19)により流行病が進行してい て、感染が終息しなく新型コロナウイルス感染症の感染者が増加し続けいる現状である。原因の一つとして、今までの感染症と違い無症状感染者といった感染しているのに症状が現れない感染者がいる。そのため、無症状感染者が感染者を増やすリスクがある。

→先行研究の新型コロナウイルスを意識したSIRモデルから新型コロナウイルス感染症が収束するかどうかを数学的にみていきたい。

先行研究

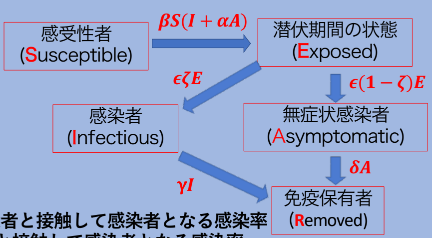
感受性者S,感染者I、回復者Rから成り立つ基本的な感染症モデルSIRモデルに、感染者になる前に感染力を持たない期間 Eを加え、さらに無症状感染者Aも加えた感染症数理モデルのSEIARモデルが研究されている。

[長田直樹　「区画に無症状感染者を持つ感染症の数理モデル 」 (2020)]

SEIARモデル

SEIARモデルは、
感受性者S、潜伏期間者E、症状がある感染者I、無症状感染者A、回復者R、
の５つの区分に分けられた数理モデルである。SEIARモデルのイメージ図は上の図のようになる。

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(I+\alpha A)$$
$$\frac{dE}{dt} = \beta S(I+\alpha A) - \epsilon E$$
$$\frac{dI}{dt} = \epsilon\zeta E \ - \gamma I$$
$$\frac{dA}{dt} = \epsilon(1-\zeta)E \ - \delta A$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + \delta A$$



βは感受性者が症状がある感染者と接触して感染者となる感染率
$\alpha\beta$は感受性者が無症状感染者と接触して感染者となる感染率
ϵは潜伏期間中の感染者が発症して周りに感染させる感染者となる確率
ζは感染率を持たない潜伏期間の感染者が
症状がある感染者と無症状感染者に分かれる割合
γは症状がある感染者が回復者になる回復率
δは無症状感染者が回復者になる回復率を表す。

2. 目的

先行研究ではSEIARモデルの定義まで行われて安定性について問われていなかったため、

- SEIARモデルに対する安定性解析を行い、リアプノフ関数を構成する。
- 数値計算をし、安定か不安定かを可視化する

3.リアプノフ関数

リアプノフ関数の定義を満たし、平衡点においてリアプノフ関数が存在すれば、平衡点は安定であることがわかる。平衡点に対して安定であることを示せれば平衡点に収束する。逆に平衡点に対して不安定であれば発散する。

リアプノフ関数の定義

原点X=0を含む領域をΩとする.
(ｉ)全てのXに対して, V(X)が正定値である。
(ⅱ)Ω内で軌道に沿って

$$\frac{dV(X)}{dt} = \nabla V(X)\bullet\frac{dX}{dt} = \nabla V(X)\bullet F(X) \le 0$$

上記の(ｉ)(ⅱ)が成り立つ時、V(X)を$\frac{dX}{dt}$のリアプノフ関数という。リアプノフ関数があれば、平衡点において安定である。

平衡点

平衡点は時間tに左右されない点を表している。

$$\left.\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta S(I+\alpha A) = 0\\ \frac{dE}{dt} &= \beta S(I+\alpha A) - \epsilon E = 0\\ \frac{dI}{dt} &= \epsilon\zeta E \ - \gamma I = 0\\ \frac{dA}{dt} &= \epsilon(1-\zeta)E \ - \delta A = 0\end{aligned}\right\}$$

第１項から $S=0, (I+\alpha A)=0$ の２通りに場合分け をする。

(1) $S=0$の場合 →(0,0,0,0)
(2) $(I+\alpha A)=0$の場合
→$(S^*,0,0,0)$

平衡点$(S^*,0,0,0)$

(S^*は全ての実数を表す)

平衡点において安定であるかを、リアプノフ関数を用いて示していく。

SEIARのリアプノフ関数

Ω内の内部に含まれる軌道上で以下の関数を考える。

$$V(X) = S^*\left[\frac{S}{S^*} - 1 - log\left(\frac{S}{S^*}\right)\right] + E + I + A$$

V(X)がリアプノフ関数になるのかをリアプノフ関数の定義に合わせて考えてみる。

定義(ｉ)

(ｉ)全てのXに対して、V(X)が正定値である。

$$V(X) = S^*\left[\frac{S}{S^*} - 1 - log\left(\frac{S}{S^*}\right)\right] + E + I + A$$

S	0	‥	S^*	‥
$V_S(S)$	＼	−	0	＋
$V(S)$	＼	↘	0	↗

E	0	‥
$V_E(E)$	1	＋
$V(E)$	0	↗

$S{=}S^*, E=I=A=0$の時、最小値である。

つまり、平衡点$(S^*,0,0,0)$の時最小値で$V(X)$の値が0なので、$V(X)$が正定値である。よって、リアプノフ関数の定義の(ｉ)が成り立つ。

定義(ⅱ)

(ⅱ)

$$\frac{dV(X)}{dt} = \nabla V(X)\bullet\frac{dX}{dt} = \nabla V(X)\bullet F(X) \le 0$$

$$\frac{dV(X)}{dt} = \nabla V(X)\bullet\frac{dX}{dt}$$
$$= \left(1-\frac{S^*}{S}, 1, 1, 1\right)\begin{pmatrix}-\beta S(I+\alpha A)\\ \beta S(I+\alpha A)-\epsilon E\\ \epsilon\zeta E \ -\gamma I\\ \epsilon(1-\zeta)E \ -\delta A\end{pmatrix}$$
$$=(\beta S^* - \gamma)I + (\alpha\beta S^* - \delta)A \ < \ 0$$

$S^* < \frac{\gamma}{\beta}$かつ$S^* < \frac{\delta}{\alpha\beta}$の時、$\frac{dV(X)}{dt} \le 0$が満たされる。

よって$S^* < \frac{\gamma}{\beta}$かつ$S^* < \frac{\delta}{\alpha\beta}$の時、リアプノフ関数の定義の(ⅱ)が成り立つ。

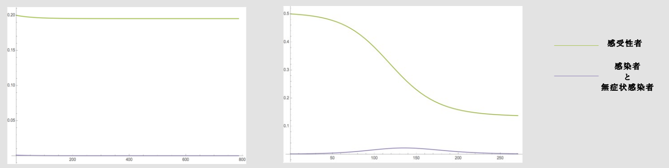
$S^* < \frac{\gamma}{\beta}$かつ$S^* < \frac{\delta}{\alpha\beta}$の時、 $V(X)$がリアプノフ関数の定義を満たしてるので、 $V(X)$がリアプノフ関数となる。
よって$S^* < \frac{\gamma}{\beta}$かつ$S^* < \frac{\delta}{\alpha\beta}$の時、SEIARモデルの平衡点$(S^*,0,0,0)$は安定である。

4.数値計算から安定の確認

リアプノフ関数から、$S^* < \frac{\gamma}{\beta}$かつ$S^* < \frac{\delta}{\alpha\beta}$の時、SEIARモデルの平衡点$(S^*,0,0,0)$は安定であるから、数値計算をしていく。

数値計算結果

$\alpha = 1.0, \beta = 0.25, \gamma = 0.07, \delta = 0.07$とし, 数値計算を行ったところ、平衡点$(S^*,0,0,0)$が安定である条件は、 $S^* < 0.28$であるので、 $S^* < 0.28$の時、 SEIARモデルの平衡点$(S^*,0,0,0)$は安定である 。つまり、$S^* = 0.2$ は安定で、$S^* = 0.5$の時は不安定である 。



$S^* = 0.2$　　　$S^* = 0.5$

グラフからも $S^* < 0.28$の時 SEIARモデルの平衡点$(S^*,0,0,0)$は安定であり、$0.28 < S^*$の時、 SEIARモデルの平衡点$(S^*,0,0,0)$は不安定である。

5.結論

リアプノフ関数があることから、 $S^* < \frac{\gamma}{\beta}$かつ$S^* < \frac{\delta}{\alpha\beta}$の時、SEIARモデルの平衡点が安定であることが得られた。また、数値計算をしグラフを通してSEIARモデルの平衡点が安定である条件を満たしていると安定であり、条件を満たしていないと不安定であることが得られた。

6.今後の展望

新型コロナウイルス感染症を意識したSIRモデル(SEIARモデル)は、実際のパラメーターがどのようになっているかがわからない現状である。また、回復者が増加していくだけを想定しているので短期的に見ればSEIARモデルは有効に適応できるが、実際の問題として長期的に新型コロナウイルス問題が生じているため、免疫を失い回復者が感受性者に戻ることが起きている。

そのため

・実際のデータからパラメーターを求めより現実的にしたい
・SEIARモデルに新たに、回復者Rから感受性者Sに移行するモデルを作成したい

が今後の課題である。