多面性を持つプレイヤーによる「いじめ」への対応とレプリケータダイナミクス

明治大学 総合数理学部 現象数理学科 4年

1. 序論

ゲーム理論とは

各プレイヤーが各々の利得を最大にするように他のプレイヤーと相互作用しながら戦略を決定するモデル

囚人のジレンマモデルとは

自身の利得を最大にするように行動を決定するにも関わらず、お互い真に利得の高い選択肢を選べない事(ジレンマ)が起こるモデル

囚人A＼囚人B	Bの戦略1（協力）	Bの戦略2（裏切り）
Aの戦略1（協力）	(4, 4)	(0, 5)
Aの戦略2（裏切り）	(5, 0)	(3, 3)

図.1 囚人に関する利得表, 右下が均衡点

先行研究の目標（武田ら,2009,第52回 自動制御連合講演会）

プレイヤーに多面性を導入するとどのような変化が表れるかレプリケータダイナミクスを用いて調べる

多面性を持つプレイヤーとは

囚人のジレンマの利得(図.1)に加えて新しい利得 (図.2)を加えられたプレイヤー。プレイヤーは内部ゲーム$a_i, b_j (i, j = \{1,2\})$の結果で行動(外部戦略) X , Yが決定する。

囚人A＼囚人B	Bの戦略1（協力）	Bの戦略2（裏切り）
Aの戦略1（協力）	(5, 5)	(3, 0)
Aの戦略2（裏切り）	(0, 3)	(4, 4)

図.2 囚人に関する第2利得表

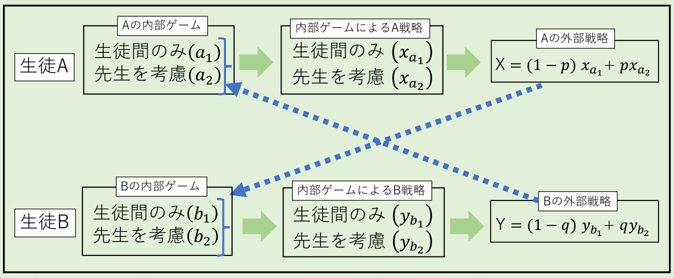


図.3 プレイヤー間の内部ゲームと外部戦略のフロー、それぞれの内部ゲームには相手のプレイヤーの行動が考慮されている
それぞれの利得行列の優先度は$0 < p < 1, 0 < q < 1$で表されている

レプリケータダイナミクスによる解析（Taylor and Jonker 1978）

プレイヤーがある戦略をとる時間変化を生物の個体群ダイナミクスに見立てる。

$$\dot{x}^k_{a_i} = x^k_{a_i}[\underbrace{U_{a_i}(e^k_{a_i}, Y)}_{\text{内部ゲーム}a_i\text{で純戦略}k\text{のプレイヤーの利得(U)}} - \underbrace{U_{a_i}(x_{a_i}, Y)}_{\text{集団の平均利得}}]$$

$\dot{y}^k_{B_j}$も同様に導出することができる。利得は対称行列ゆえ、ダイナミクスの振るまい方はAのみを見ればよく、
戦略$\dot{x}^k_{a_i}$やXは閉区間[0,1] かつそれぞれの戦略の和は１であることから片方の戦略のダイナミクスのみを見れば十分。

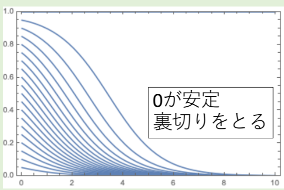
内部ゲームにおける純戦略１(協力)のダイナミクス

$$\dot{x}^1_{a_1} = x^1_{a_1}(1 - x^1_{a_1})(2Y^1 - 3) \quad \dot{y}^1_{b_1} = y^1_{b_1}(1 - y^1_{b_1})(2X^1 - 3)$$

$$\dot{x}^1_{a_2} = x^1_{a_2}(1 - x^1_{a_2})(6Y^1 - 1) \quad \dot{y}^1_{b_2} = y^1_{b_2}(1 - y^1_{b_2})(6X^1 - 1)$$

外部戦略 $X^1 = (1-p)\, x^1_{a_1} + p x^1_{a_2} \quad Y^1 = (1-q)\, y^1_{b_1} + q y^1_{b_2}$

通常の囚人のジレンマ



多面性を持つジレンマ

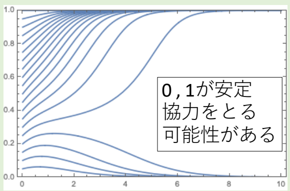


図.4 $\dot{x}^1_{a_2}$における通常のジレンマ(左)と図.5 多面性を考慮した場合(右) 左は常に裏切りが安定であるが、右は協力の場合も安定であることがわかる。これは初期値$(x^1_{a_1}, y^1_{b_1}, y^1_{b_2}) = (0.3, 0.3, 0.3)$であり, $x^1_{a_2}$は閉区間[0,1]で0.1刻みに取ったものである。

2. 目標

いじめに関するジレンマ問題に対して、新たに「先生の存在を考慮した利得」を導入し**多面性**を持つプレイヤーとしたときのダイナミクスを解析する。

3. いじめに関するジレンマ

プレイヤーを生徒とする学校内いじめに関して、いじめは悪いことだとわかっているが無くならないジレンマを表す。

両者「助ける」を選択すればいじめから救うことができるが片方だけが助けると自信がいじめの対象になってしまう(図.5(上))と片方だけ助けた場合でも先生という存在がいることから、いじめの対象にならない(図.5(下))状況を利得行列を用いて表す。

生徒A＼生徒B	Bの戦略1（助ける）	Bの戦略2（傍観）
Aの戦略1（助ける）	(3, 3)	(0, 2)
Aの戦略2（傍観）	(2, 0)	(2, 2)

生徒A＼生徒B	Bの戦略1（助ける）	Bの戦略2（傍観）
Aの戦略1（助ける）	(3, 3)	(2, 2)
Aの戦略2（傍観）	(2, 2)	(2, 2)

図.5 いじめに関する利得表

4. 線形安定性解析

動学モデルから４つの微分方程式を導き、各平衡点における固有値を計算し、その安定性を調べる

内部ゲームにおける純戦略１(助ける)のダイナミクス

$$\dot{x}^1_{a_1} = x^1_{a_1}(1 - x^1_{a_1})(3Y^1 - 2)$$
$$\dot{x}^1_{a_2} = x^1_{a_2}(1 - x^1_{a_2})\, Y^1$$
$$\dot{y}^1_{b_1} = y^1_{b_1}(1 - y^1_{b_1})(3X^1 - 2)$$
$$\dot{y}^1_{b_2} = y^1_{b_2}(1 - y^1_{b_2})\, X^1$$

外部戦略

$$X^1 = (1-p)\, x^1_{a_1} + p x^1_{a_2}$$
$$Y^1 = (1-q)\, y^1_{b_1} + q y^1_{b_2}$$

平衡点における安定性

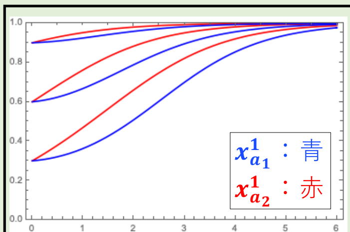
① **(1,1,1,1)** p, qに関わらず**安定**

② **(0,1,0,1)** $p < \frac{2}{3}$ かつ $q < \frac{2}{3}$ で**安定**

③ **(0,0,0,0)** は**判定不可**

④ **その他15個の平衡点は全て不安定**

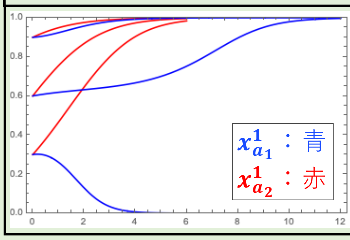
5. シミュレーション



① $p = \frac{9}{10}, q = \frac{9}{10}$ のとき

$x^1_{a_1}, x^1_{a_2}$ は1へ収束

プレイヤーAは戦略
「助ける」のみを取る



② $p = \frac{1}{10}, q = \frac{1}{10}$ のとき

$x^1_{a_1}$(青)は0 ,1のいずれかに収束

プレイヤーAは戦略
「助ける」または「傍観」を取る

図.8 p, qの値が2/3よりも大きい場合 (上)と 図.9 p, qの値が2/3よりも小さい場合(下)。$x^1_{a_1}$については初期値$(x^1_{a_2}, y^1_{b_1}, y^1_{b_2}) = (0.7, 0.7, 0.7)$であり、$x^1_{a_2}$は初期値$(x^1_{a_1}, y^1_{b_1}, y^1_{b_2}) = (0.7, 0.7, 0.7)$である。縦軸には閉区間[0,1]で0.3刻みに取ったもの。

- **$x^1_{a_2}$(赤)はp, qの値によらず常に助ける**
- **$x^1_{a_1}$(青)はp, qが小さい時利得が１つの場合と同様**

6. 結論

多面的な利得基準を有するプレイヤー同士では、先生の存在があると助けるという戦略安定となる。しかし、先生の介入が小さくなればなるほど多面性のない場合と同様の結果となり、いじめを無くす行動を取らなくなる。