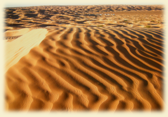
風紋・砂丘形成の数理モデル

明治大学 総合数理学部 現象数理学科4年 池田研究室所属

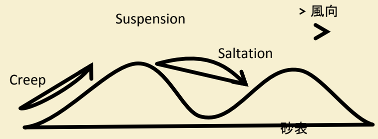
1. 研究目標



動機：砂漠における風紋や砂丘が形成される過程、
砂の挙動が知りたい
先行研究：観測をもとに、砂の運動を単純化し、砂粒同士の
相互作用や流体の運動を考慮しない数理モデルがある
研究目標：先行研究では明らかになっていなかった、
❖ 砂は跳ね方
❖ 特に流速が大きい状況で流速は風紋にどのような影響を及ぼすのか
❖ 先行研究の模型は拡散を刻んでいないようだが問題はないのか
を明らかにし、
いくつか種類がある風紋や砂丘はに対して、数理モデルは汎用性があるのか
を追研究し確かめる

2. 砂の運動形態

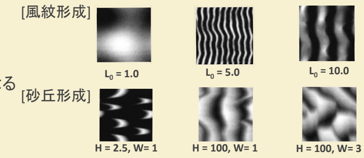
＊ Creep (表面這行)
＊ Saltation (跳躍)
＊ Suspension (浮遊)



Saltationで飛んだ砂粒は着地した際、持っているエネルギーを周りに渡すか、
自分がもう一度飛ぶためSaltationを繰り返す
Saltationの繰り返し終了後、Creepによって高さをならす

先行研究

- 流速が小さいときは風紋は現れず、
  一定値を超えると現れるようになる
- 流速を大きくしていくと、風紋の波長が長くなる
- 数値計算はL_0 = 1～10
- 水槽実験では、さらに流速を大きくすると、
  風紋が現れなくなる
- 逆向きに進むといった課題がある



(H : 砂の層の厚み, W : 定常的に吹く風向きの数)

フィールドの定義

砂床表面を
N×Nの2次元格子に区切る

h(i, j) : 砂床の平均の高さ

初期条件: 砂の層は微小なランダムな
凹凸を持つ

境界条件 : 周期境界条件

変数設定

N	フィールドの大きさ	100	Q (風紋)	飛ぶ砂の量	0.1
T	時間ステップ	1000 (風紋拡散なし) 10000 (風紋拡散あり) 1000 (砂丘)	Q_0 (砂丘)	飛ぶ砂の量	0.2
M	Saltationの回数		b	風紋形成の飛距離に関わる定数	5
K	Saltationする場所の数		L_0 (風紋)	風速を表す	
D	拡散係数	1	L_0 (砂丘)	風速を表す	10

3. 風紋形成

[仮定]
＊同じ格子内の砂は同じ動きをするとする
＊風紋の波長も高さも数cmのスケールなので、
流速は一定であるとする

数理モデル

Saltation

$$L(i,j) = L_0 + bh_n(i,j).$$

飛距離
L_0の効果が出るようにL_0≒ bh(i,j)くらいのオーダーが適切である
具体的には|h(i,j)|<1くらいとする

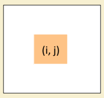
$$h_{n'}(i,j) = h_n(i,j) - Q,$$
$$h_{n'}(i+L(i,j),j) = h_n(i+L(i,j),j) + Q.$$

中間ステップn′で
Qだけ砂を交換する

Creep

拡散の刻みなし

$$h_{n+1}(i,j) = h_{n'}(i,j) + D\left[\frac{1}{6}\sum_{nn} h_{n'}(i,j) + \frac{1}{12}\sum_{nnn} h_{n'}(i,j) - h_{n'}(i,j)\right]$$



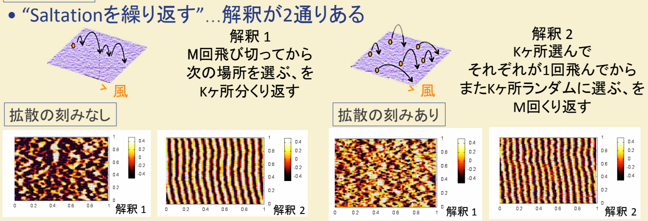
$$\sum_{nn} h(i,j) = h(i+1,j) + h(i,j+1) + h(i-1,j) + h(i,j-1)$$
$$\sum_{nnn} h(i,j) = h(i+1,j+1) + h(i+1,j-1) + h(i-1,j+1) + h(i-1,j-1)$$

拡散の刻みあり **先行研究にはなかった手法.** dt = 0.1とし、10回かけて拡散するようにする

$$h_{n+1}(i,j) = h_{n'}(i,j) + Ddt\left[\frac{1}{6}\sum_{nn} h_{n'}(i,j) + \frac{1}{12}\sum_{nnn} h_{n'}(i,j) - h_{n'}(i,j)\right]$$

数値計算

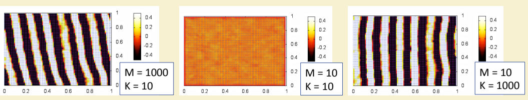
- "Saltationを繰り返す"...解釈が2通りある



解釈 2では風紋が形成されるが、解釈 1では風紋が形成されない

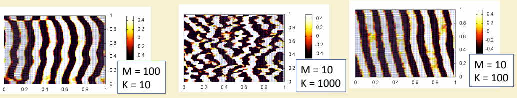
- SaltationとCreepの関係...M、Kの関係

拡散の刻みなし



- **Mが大きいほど、Kが大きいほど、はっきりした紋ができる**

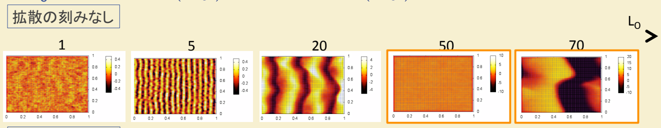
拡散の刻みあり



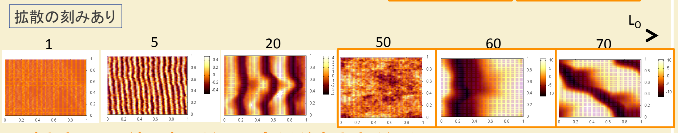
- **M, Kが共に非常に少ないと紋はできないが、**
  M, Kを大きくすると乱れるようになる
- **拡散刻みによらずM, Kに対して対称的な紋が得られる**

- L_0 の変化... $L(i,j) = L_0 + bh_n(i,j)$

拡散の刻みなし



拡散の刻みあり



L_0が大きいほど幅が長くなり、高低差も大きくなる
→ 現実で風が強いほど遠くに飛ばされることと一致
L_0 = 1、50では紋はできず、L_0 = 50を超えると、不安定な紋ができるようになる
拡散刻みありとなしでは紋の形が異なる
紋は消滅することなく維持される
風向とは逆向きに進むように見える

4. 砂丘形成

スケールの大きな砂丘では
砂丘周りの流速や飛ぶ砂の量を関数を置いて考慮する

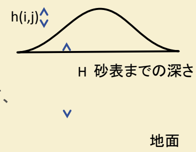
数理モデル

Saltation

$$q(i,j) = Q_0 \tan(\Delta h(i,j) + 1).$$
$$l(i,j) = L_0 \tan(-\Delta h(i,j) + 1).$$
$$\Delta h(i,j) = h(i,j) - h(i-1,j)$$

＊上流側斜面では一定の流速で流れる
＊頂上付近では流速の鋭いピークがある
＊下流側斜面では流速が急速に衰える

$$h_{n'}(i,j) = h_n(i,j) - q(i,j),$$
$$h_{n'}(i + l(i,j), j) = h_n(i + l(i,j), j) + q(i,j).$$

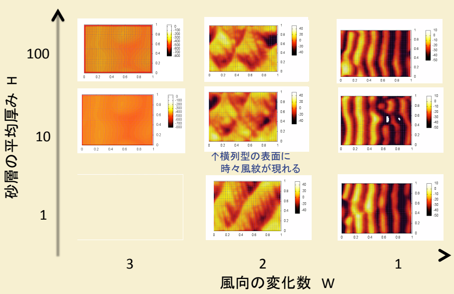


Creep 風紋形成と同じ

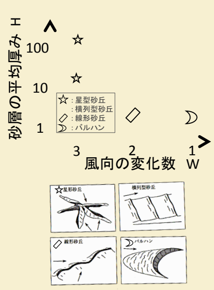
ある一定の深さの所に、それ以上掘り進めない固い地面があるとして、
その高さを調整することで砂の量を調整できるようにする
砂の量や、風向の数による、砂丘パターンへの影響を調べる

数値計算

[結果]



[先行研究]



砂量・風向数と砂丘の種類の関係がわかった
星型砂丘とバルハン、2方向の横列型砂丘は得られなかった

5. 結論

＊ 風紋形成では、風紋ができる状況が詳しくわかり、現実に則した結果が得られた

- Saltationは少数ヶ所が多数回飛ぶ場合と、多数ヶ所が少数回飛ぶ場合がある
- 流速 L_0小さい時は紋はできず、L_0を大きくするほど風紋の間隔は広くなり、
  全長の1/2ではできなくなる
- さらにL_0を増やすと再び不安定な紋ができるようになる

＊ 風紋形成で拡散を刻むと異なる結果が得られた

- K, Mが大きすぎると紋が乱れる
- L_0が大きいほど風紋の間隔は広くなり、全長の1/2ではできなくなる
  紋の形が異なる
- さらにL_0を増やすと不安定な紋が現れた

＊ 砂丘形成では、深さと風向を変化させることで、様々な種類の砂丘が得られた

- 横列型砂丘、線形砂丘は得られた
- 星型砂丘、バルハン、2方向の横列型砂丘は得られなかった