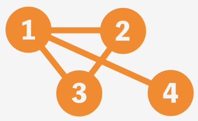
スケールフリーネットワーク上のグラフラプラシアンの固有ベクトルの局在性

明治大学 総合数理学部 現象数理学科 4年

1. 背景

Q. **ネットワーク上**で「もの」や「情報」が**拡散**する様子は何によって特徴付けられるのか？

A. ネットワークの**グラフラプラシアン**



無向な重み無しグラフ

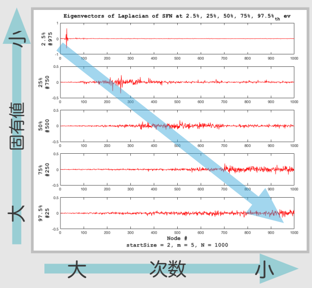
$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c}\text{隣接行列と} \\ \text{次数行列の差}\end{array}\right)$$

ノード間の「もの」の流入出を表している.

スケールフリーネットワーク: 次数の分布が冪分布に従うようなネットワーク. 世の中の色んな場所で観察される.

e.g.) 神経回路 / ソーシャルネットワーク / 複雑系 etc. [A. L. Barábasi and A. Albert, "Emergence of scaling in random networks" (1999)]

Q. スケールフリーネットワークのグラフラプラシアンにはどのような性質があるか？



A. 固有ベクトルの成分が**次数の近いノードの周辺で比較的大きな値を取り, 値が局在**している様子が見られる.

局在性が何故見られるかは**未解決問題**

[P. N, McGraw and M. Menzinger, "Laplacian spectra as a diagnostic tool for network structure and dynamics" (2008)]

(上図) BarábasiとAlbertの方法を用いて生成した1000個のノードを持つスケールフリーネットワークに対して固有ベクトルを表示した.

2. 目標

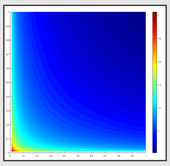
スケールフリーネットワークのグラフラプラシアンの連続極限に対する固有値問題を導出し解析することで, 局在性の起源を探る.

連続極限を考える妥当性

実際にスケールフリーネットワーク上の拡散現象を考えるとき, 多くの場合は大規模なネットワークを考える.

3. 有限から連続極限へ

Graphon: ランダムなグラフの連続極限. $[0,1]^2$上の対称な可測関数として表現される. [L. Lovász, "Large networks and graph limits" (2012).]



スケールフリーネットワークの連続極限のgraphonは $0<\alpha<1/2$ として次のように表現できる.

$$W(x,y) = (1-\alpha)^2(xy)^{-\alpha}$$

[C. Borgs, et. al, "An Theory of sparse graph convergence I: Limits, sparse random graph models, and power law distributions", arXiv (2014)]

Graphon Laplacian: Graphonを用いてグラフラプラシアンの連続極限を線形作用素として表現する.

グラフラプラシアンと同様に「隣接行列」と「次数行列」の差により表す. Graphon Wに対するgraphon Laplacianは下のように表せる.

$$[Lu](x) = \underbrace{\int_0^1 W(x,y)u(y)dy}_{\text{隣接行列に対応}} - \underbrace{\left(\int_0^1 W(x,y)dy\right)u(x)}_{\text{次数行列に対応}}$$

4. Graphon Laplacianの性質

スケールフリーネットワークの連続極限のgraphon Laplacianは次のように表現される.

$$L : D(L) \to L^2(0,1), \quad D(L) = L^2((0,1),\ x^{-2\alpha}dx)$$

$$[Lu](x) = (1-\alpha)^2 x^{-\alpha}\int_0^1 y^{-\alpha}u(y)dy - (1-\alpha)x^{-\alpha}u(x)$$

Lは$L^2(0,1)$上の**自己共役作用素**であり, **スペクトルとレゾルベント**は次の定理により網羅される.

定理１（スペクトルとレゾルベント）

$0<\alpha<1/2$とする. Lのスペクトルは点スペクトルが$\{0\}$であり, 連続スペクトルは$(-\infty, \alpha-1]$である. また, レゾルベント集合は$\mathbb{C}\setminus((-\infty,\alpha-1]\cup\{0\})$であり, レゾルベント$(\lambda I - L)^{-1}$は

$$[(\lambda I - L)^{-1}f](x) = \frac{f(x) + (1-\alpha)^2 x^{-\alpha}C}{\lambda + (1-\alpha)x^{-\alpha}}, \quad C = \frac{\int_0^1 \frac{y^{-\alpha}f(y)}{\lambda+(1-\alpha)y^{-\alpha}}dy}{1-\int_0^1 \frac{(1-\alpha)^2 y^{-2\alpha}}{\lambda+(1-\alpha)y^{-\alpha}}dy}$$

である. ここで$f\in L^2(0,1)$である.

次の定理からLは**解析半群を生成**するので, 拡散方程式の連続極限$(\partial_t u = Lu)$に解が存在することがわかる.

定理２（角域作用素）

$-L$は角域作用素である. すなわち, εを$(1-\alpha)$未満の任意の正数, $a_\varepsilon = \sqrt{2}\varepsilon$とし,

$$S = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 < |\arg(\lambda - a_\varepsilon)| \le \frac{3\pi}{4},\ \lambda \neq a_\varepsilon\}$$

とすると, ある$M\ge 1$が存在して, 任意の$\lambda\in S$に対して

$$\|(\lambda I - L)^{-1}\| \le \frac{M}{|\lambda - a_\varepsilon|}$$

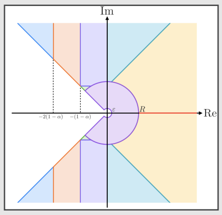
が成り立つ.

(証明の概略)

$R > (1-\alpha)$として, 右図の色付きの各領域においてレゾルベントを評価して次の不等式を得る.

$$\|(\lambda I - L)^{-1}\| \le \frac{\overline{M}}{|\lambda|}$$

なお, $\overline{M}$は領域に依存しない定数である. この不等式を用いて, S上の評価を得る. □



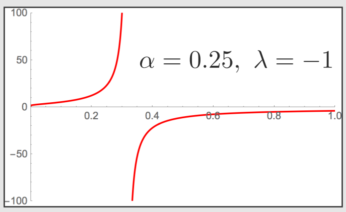
5. 「固有関数」の局在性

連続スペクトルには固有関数は定義できないが, レゾルベントの形から形式的に「固有関数」を定めると特異性が見られる.

連続スペクトル λの「固有関数」

$$u(x) = \frac{x^{-\alpha}}{\lambda + (1-\alpha)x^{-\alpha}}$$

特異点: $x = \left(-\frac{\lambda}{1-\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$



「固有関数」の特異性こそが局在性の起源である

6. 結論

スケールフリーネットワークの連続極限に対するgraphon Laplacianの連続スペクトルの「固有関数」における特異性が局在性の起源である.