

乾燥と凝集の影響を含む界面挙動の数値モデルの解析

先端数理科学研究科 現象数理学専攻 博士前期課程2年 池田研

1. 概要

● 薄膜... 薄く広がっている液体

例) シャボン玉の膜, 雨水, 肌塗った日焼け止めクリームなど

現象

不揮発性粒子を含む薄膜は、乾燥すると界面に凹凸構造を形成する

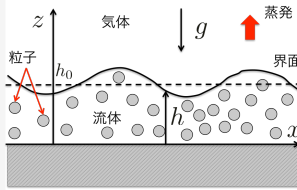


図(1): 道路上に薄く広がっている雨水

● 提唱されている数理モデル Kobayashi et al. (2010)

非圧縮性Navier-Stokes方程式を元に得られている発展方程式

密度・粘度が一定である流体に関する運動方程式



図(2): 水平平面上に広がった流体のイメージ

2物質の混合溶液なので密度・粘度は一定ではない

2. 目標

- 密度・粘度を変数として扱い発展方程式を得る
- 発展方程式と各パラメータとの関係について調べる

3. 数理モデル

圧縮性Navier-Stokes方程式

+ 密度・粘度に関する方程式

薄膜近似

薄く広がった流体は、厚さのスケールに対し液体の広がっている面積のスケールの方が遙かに大きい。この条件を方程式に組み込み、微小な項を0で近似する、薄膜近似という方法を用いた。

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_l(1 - \phi) + \rho_g \phi \\ \mu &= \mu_l(1 - \phi) + \mu_g \phi \\ \phi &: \text{体積率} \\ & \text{(単位体積あたりに含まれる粒子の割合)} \end{aligned}$$

発展方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} = -\frac{\partial K}{\partial \hat{x}} - \frac{\rho}{\rho_l} \hat{\alpha}(1 - \phi) - \frac{\rho_g - \rho_l}{\rho_l} D \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\hat{h} \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}} \right), \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{\hat{h}} \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}} K + \frac{\rho}{\rho_l \hat{h}} D \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\hat{h} \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}} \right) + \phi \frac{\rho}{\rho_l \hat{h}} \hat{\alpha}(1 - \phi), \\ K = \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{5}{24} \hat{g} \hat{h}^4 \frac{\partial \rho}{\partial \hat{x}} - \frac{1}{3} \hat{h}^3 \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\rho \hat{g} \hat{h} - \hat{\gamma} \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial \hat{x}^2} \right) + \frac{\hat{\sigma} \partial \phi \partial \hat{n}}{\rho \partial \hat{x} \partial \hat{x}} \right) \right\}. \end{cases}$$

乾燥項: 溶媒の乾燥の効果を表す項 (係数 $\hat{\alpha}$)

拡散項: 粒子の拡散の効果を表す項 (係数 D)

凝集項: 粒子流体間の張力による効果を表す項 (係数 $\hat{\sigma}$)

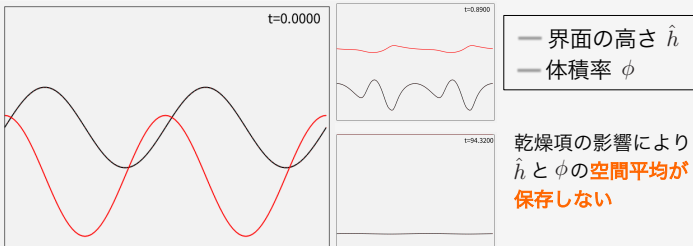
$$\hat{n} = \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}} \bigg/ \left| \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}} \right|$$

4. 数値計算 ~乾燥項がある場合 ($\hat{\alpha} \neq 0$)~

- スペクトル法を用いた。
- 周期境界条件を課した。

スペクトル法
重み付き残差法の一つ。求めたい変数に対しフーリエ変換を用いて数値計算を行うことで精度を高める方法。

$\hat{h} = 0$ のときに注意し、粘度、密度が一定でない状態でシミュレーションを行った。



乾燥項の影響により \hat{h} と ϕ の空間平均が保存しない

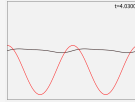
図(3): パラメータに適切な値を与えたときの混合溶液の乾燥過程による界面挙動

乾燥項を考慮しない状態において各パラメータが界面に及ぼす影響を調べる

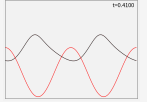
5. 数値計算 ~乾燥項がない場合 ($\hat{\alpha} = 0$)~

● 拡散項・凝集項もない場合 ($D = \hat{\sigma} = 0$)

● 密度のみ一定
界面パターンの振幅が減衰した



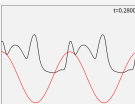
● 粘度のみ一定
界面にパターンが生じ維持された



密度のみ一定として拡散項・凝集項の影響を調べる

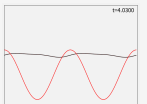
● 凝集項のみある場合 ($D = 0, \hat{\sigma} \neq 0$)

界面にパターンが生じ維持された



● 拡散項・凝集項がある場合 ($D \neq 0, \hat{\sigma} \neq 0$)

界面パターンの振幅が減衰した



拡散項・凝集項がある場合、界面は平坦になる

仮説: 定数定常解に必ず収束する

6. 線形安定性解析

拡散項・凝集項がある場合の定数定常解の安定性解析

定数定常解に摂動を加えたものを初期値(右式)として与えたときの解の挙動について調べる。

$$\begin{cases} \hat{h} = \hat{h}_0 (1 + A(\hat{t}) e^{ik\hat{x}}), \\ \phi = \hat{\phi} + B(\hat{t}) e^{ik\hat{x}}, \end{cases} \quad k \geq 0, k \in \mathbb{Z}.$$

線形化した式

$$\begin{aligned} A(\hat{t}) &= C_1 e^{-\frac{\hat{\rho}}{\rho_l} \hat{D} k^2 \hat{t}} + C_2 e^{-\frac{\hat{g} \hat{\rho} + \hat{\gamma} k^2}{3 \hat{\mu}} k^2 \hat{t}} \\ B(\hat{t}) &= C_3 e^{-\frac{\hat{\rho}}{\rho_l} \hat{D} k^2 \hat{t}} \end{aligned}$$

$\hat{\rho}, \rho_l, \hat{D}, \hat{g}, \hat{\gamma}, \hat{\mu} > 0$ より、
 $\lim_{\hat{t} \rightarrow \infty} A(\hat{t}) = \lim_{\hat{t} \rightarrow \infty} B(\hat{t}) = 0$

安定...定常解に収束する
不安定...定常解から遠ざかる

定数定常解は安定

7. 定常解の存在

蒸発係数を0、界面の高さ \hat{h} と体積率 ϕ の時間微分を0としたとき、周期境界条件において解が存在するかどうかを調べた。また、 \hat{n} を右式と近似して扱った。

$$\hat{n} = \tanh \frac{\nabla \phi}{\varepsilon}$$

拡散項・凝集項がある場合 ($D \neq 0, \hat{\sigma} \neq 0$)

一般解

$$\phi = \begin{cases} C_8 \int_0^{\hat{x}} \frac{1}{\hat{h}} dz \quad (C_7 = 0), \\ \pm \frac{C_7 \phi_0 - C_8}{C_7} \exp \left[-\frac{C_7}{\hat{D}} \int_0^{\hat{x}} \frac{1}{\hat{h}} dz \right] + \frac{C_8}{C_7} \quad (C_7 \neq 0). \end{cases}$$

ϕ に関して解くことで得られる一般解は周期境界条件を満たさないため、境界条件を満たす特異解が解となる。
 ϕ を定数とすることで \hat{h} も同様に定数となることがわかった。

特異解

$$\phi = \begin{cases} 0 \quad (C_7 = 0), \\ C_8 \quad (C_7 \neq 0). \end{cases}$$

ϕ, \hat{h} 共に定数定常解しか存在しない

線形安定性解析と合わせて考えると...

界面にパターンは形成されない

凝集項のみある場合 ($D = 0, \hat{\sigma} \neq 0$)

式変形より下式が得られた。この式は \hat{h} に関して非斉次二階偏微分方程式となっているため、任意に ϕ を与えることで \hat{h} を求められるということがわかった。

$$\rho \hat{g} \hat{h} - \hat{\gamma} \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial \hat{x}^2} = -\frac{\hat{\sigma}}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}} \tanh \frac{\nabla \phi}{\varepsilon} + \varepsilon \hat{\sigma} \log \left(\cosh \frac{\nabla \phi}{\varepsilon} \right) + C_6$$

境界条件を満たす任意の体積率 ϕ に対し界面の高さ \hat{h} が定まる

\hat{h} の非定数定常解は ϕ に依存して無数に存在する

8. 結論

- 薄膜近似より近似方程式を導出した
- 密度一定で乾燥項が無く、凝集項・拡散項がある場合ではパターンは得られないことが分かった
- 密度一定で凝集項のみ存在する場合は、非定数定常解が無数に存在することがわかった