

# ペットボトル振動子の同期現象

総合数理学部 現象数理学科 池田研究室 4年

## 序論

ペットボトル振動子のリズム運動とは、飲み口の部分に管を通したペットボトルに水を入れて逆さまにすると、水の流出と空気の流入が交互に起こる現象である。同一の2つのペットボトル振動子同士をチューブでつなぎ、そのチューブ内を空にすると同相同期(振動のタイミングがそろい)、水を入れると逆相同期(振動のタイミングが交互になる)することが明らかになっている。本研究ではチューブ内の液体の質量と粘度に着目し実験を行う。またペットボトル振動子が1つの場合の数値モデルと2つのペットボトル振動子をつなげた場合の数値モデルを提案し数値計算を行う。特に2つのペットボトル振動子をつないだ場合は、実験結果の傾向を再現することを目標とする。

## 目的

### 1. 実験結果の解析

2つの同一のペットボトルをチューブでつなぎ、先行研究では行われていないチューブ内の液体の質量と粘度を変化させる実験を行った。オーダーパラメータ[3]を使って解析を行う。

### 2. 数値モデルと数値解析

先行研究[1]のペットボトル振動子が1つの場合と2つのペットボトル振動子をつないだ場合の数値モデルを見直す。リズム運動や同期現象を再現する。

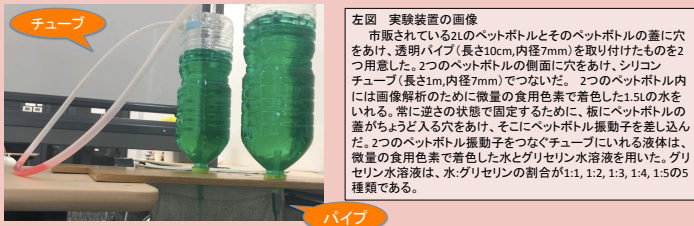
## 実験

**目的** チューブ内の液体の質量や粘度を変化させることにより挙動がどう変化するか調べる

先行研究[2]では、2つの同一のペットボトル振動子をチューブでつなぎ、チューブ内に水の入っていない場合は位相がほぼ揃って同相同期し、チューブ内に10gの水を入れた場合は位相差がほぼπになり逆相同期することがわかっている。

### 実験方法

先行研究[2]を参考に、以下に示すような実験装置を作成した。



2つの実験を行った。

1. チューブ内の水の質量を0gから10.0gまで1.0gずつ増やす。
2. チューブ内の液体の粘度を変化させる。粘度の異なる5つのグリセリン水溶液を使用し、3.0gから8.0gまで1.0gずつ増やす。

### 解析方法

- ① 水が流れ始めてから120秒間の動画を『ffmpeg』で600枚の静止画にする。
- ② ImageJに読み込みパイプの下方の一部分の輝度を数値化する。
- ③ 輝度の時間変化を調べ極大点を取り出し、以下のオーダーパラメータを求める。

オーダーパラメータの定義[3]

$$R_{ome} = \frac{1}{2} |\exp(i\theta_1) + \exp(i\theta_2)|$$

同相同期状態では最大値1をとる  
逆相同期状態(πで同期する)では最小値0をとる

$$R_{lwo} = \frac{1}{2} |\exp(i2\theta_1) + \exp(i2\theta_2)|$$

同相同期状態では最大値1をとる  
完全な逆相同期状態でも最大値1をとる

$\theta_1, \theta_2$ : ペットボトル振動子の位相 位相:ある極大点の時刻から次の極大点の時刻まで0から2πへと線形に増加する量

## 結果

1. チューブ内の水の質量を0gから10.0gまで1.0gずつ増やした場合 (a)のグラフ

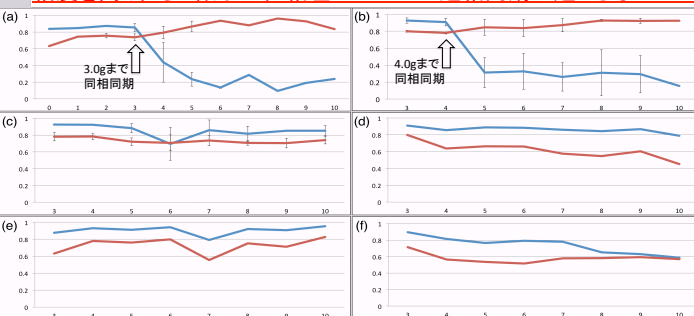
(a)では0g-3.0gの場合同相同期、5.0g-10.0gの場合逆相同期に近い挙動を示した。4.0gでは同相同期に近い挙動も逆相同期に近い挙動も起こったことから双安定を示した。

➤ チューブ内の水の挙動が4.0gを境に変化した

2. チューブ内の液体の粘度を変化させた場合 (b), (c), (d), (e), (f)のグラフ

(b)では3.0g-4.0gの場合同相同期、5.0g-10.0gの場合逆相同期に近い挙動を示した。(a)のグラフと比べると同相同期する範囲が広がっていることがわかる。(c)では同相同期に近い挙動のみを示した。(d), (e), (f)では粘度が高くなるにつれて微小の位相差が生じた。同相同期でも逆相同期でもない挙動を示した。

➤ 粘度を高くすると微小の位相差が生じたが逆相同期は起こらなかった



上図: チューブ内の液体の質量とオーダーパラメータの関係図。横軸はチューブ内の液体の質量[g]、縦軸はオーダーパラメータを表す。R<sub>ome</sub>は青、R<sub>lwo</sub>は赤の線で表されている。(a)は水の場合のグラフで、(b)から順に水:グリセリン=1:1, 1:2, 1:3, 1:4, 1:5のグリセリン水溶液の場合のグラフである。(a)の水の場合はチューブ内の水が逆流してしまい途中で質量が変化してしまったり、ペットボトル振動子の片方のみしか水が流出せず振動しないことがあった。今回は2つのペットボトル振動子がリズム運動した場合のみ解析を行いオーダーパラメータを求めた。

## 結論

1. チューブ内の液体の質量や粘度を変化させる実験を行った。数値計算結果と比べると異なる結果を示している。(右表)
2. 数値モデルを見直し、リズム運動や同期現象を再現することができた。

## 数値モデルと数値計算

### <ペットボトル振動子が1つの場合>

**目的** 数値モデルを見直し、リズム運動を再現する

先行研究では、パイプ内部の水が下降する平均速度と空気が上昇する平均速度に着目している。下降流では水が流出し、上昇流では空気と水の混合物が流入すると考えている。本研究では下降流では水が流出し、上昇流では空気が流入すると考える

<見直した数値モデル> (上式: 水の下降流に関する数値モデル、下式: 空気の上昇流に関する数値モデル)

$$\frac{d^2 P}{dt^2} = -\frac{32\nu_w}{d^2} \frac{dP}{dt} - K_d P - F_d$$

$$\frac{d^2 P}{dt^2} = -\frac{32\nu_a}{d^2} \frac{dP}{dt} - K_u P - F_u$$

$\nu_w$ : 水の動粘性係数,  $\nu_a$ : 空気の動粘性係数

先行研究と異なる点  
水と空気の密度や粘度に物性値を使用する

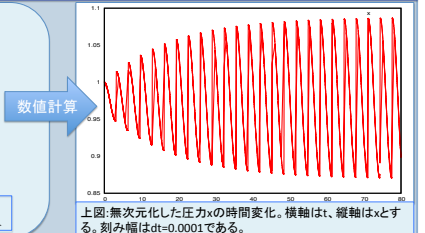
(i) 水の下降流に関する数値モデル

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \mu_d \frac{dx}{dt} + x = -a_d$$

(ii) 空気の上昇流に関する数値モデル

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \mu_u \frac{dx}{dt} + b_u x = -a_u$$

$\mu_d, a_d, \mu_u, a_u$  は定数  
無次元化したパラメータ  $\sqrt{K_d t} \rightarrow t, x = \frac{P}{P_{air}}$



**結果** 数値モデルを見直し、リズム運動を確認した。また実験でみられる水の下降流が空気の上昇流より時間が長いという傾向も確認した。

### <2つのペットボトル振動子をつないだ場合の数値モデル>

**目的** チューブ内の液体の運動方程式をたて、同期現象を再現する

先行研究では、チューブ内の水の位置zを2つのボトル間の圧力差に比例すると仮定し、次のように表されている。

$$Z = c(x_1 - x_2) \quad (c: \text{正の比例定数})$$

> このモデルは重力を考慮する場合用いることができる。 **重要**

✓ チューブ内の粘度に着目する。  
✓ チューブが真っすぐであると仮定し重力を考慮しない。  
➤ チューブ内の液体の運動方程式をたてる。

無次元化した式  $\frac{d^2 Z}{dt^2} = (x_1 - x_2) - \frac{32\nu_c}{d^2} \sqrt{K_d} \frac{dZ}{dt}$

(i) 水の下降流に関する数値モデル

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \mu_d \frac{dx_1}{dt} + x_1 = -a_d - b_d(x_1 - x_2) - c_d \frac{dZ}{dt}$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \mu_d \frac{dx_2}{dt} + x_2 = -a_d + b_d(x_1 - x_2) + c_d \frac{dZ}{dt}$$

$\mu_d, a_d, b_d, c_d$  は定数

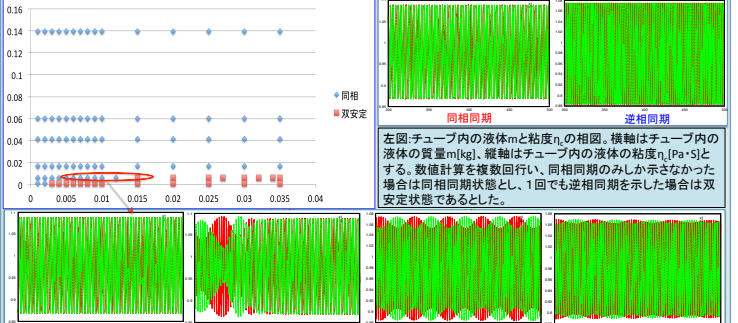
(ii) 空気の上昇流に関する数値モデル

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \mu_u \frac{dx_1}{dt} + d_u x_1 = -a_u - b_u(x_1 - x_2) - c_u \frac{dZ}{dt}$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \mu_u \frac{dx_2}{dt} + d_u x_2 = -a_u + b_u(x_1 - x_2) + c_u \frac{dZ}{dt}$$

$\mu_u, a_u, b_u, c_u, d_u$  は定数

無次元化したパラメータ  
 $\sqrt{K_d t} \rightarrow t, x_1 = \frac{P_1}{P_{air}}, x_2 = \frac{P_2}{P_{air}}$



上図: 初期値z=0.0, dz/dt=0.0, x<sub>1</sub>=0.858243, dx<sub>1</sub>/dt=0.373422, x<sub>2</sub>=0.988858, dx<sub>2</sub>/dt=0.155576におけるx<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>の時間変化。横軸は、縦軸はxで刻み幅はdt=0.001である。左から水:グリセリン=1:1のグリセリン水溶液の質量m=0.004, 0.012, 0.013, 0.015[kg]のときのグラフである。同相同期から双安定に切り替わるところをより詳細な数値計算を行ったところ振幅が変化するグラフがみられた。

**結果** 数値モデルを導出し、同相同期と逆相同期を確認した。ただし、双安定性はみられるものの、逆相同期のみが起こるとい結果は示さなかった。

チューブ内の液体	実験結果	数値計算結果	
粘度が低い	質量が小さい	同相同期	同相同期
	質量が大きい	逆相同期	双安定
粘度が高い	質量に関わらず	微小の位相差	同相同期

➤ 数値計算では重力を考慮していないため、2つの結果に違いが生じたと考えられる。