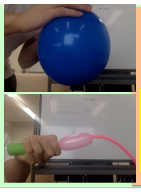
形状の違いによる風船の膨らみ方の違い

明治大学　総合数理学部　現象数理学科　池田幸太研究室所属

1.研究の動機・目標

風船の膨らむ挙動は様々なモデルで研究されており，先行研究では単純な**バネダンパモデル**(Matyda, 2004)がある．
風船には楕円球形や円柱形があり、それぞれ膨らみ方が異なるが，**膨らみ方の違いによる研究が存在しない**



【動機】風船の膨らみ方の違いを再現したい

【目標】擬似3次元モデルを導出する
楕円球型と円柱型風船の膨らみ方の違いを評価する

2.数理モデル

Matyka氏(2004)[1]のモデルを用いてバネダンパ系において i番目の質点に働く力を計算する．

質点が受ける力は(1)バネからの弾性力とダンパカと(2)面からの圧力
(1)弾性力とダンパカは以下の2つ
(i) i番目のバネから受ける弾性力とダンパカ

$$\boldsymbol{F}^{s}_{ii+1} = \left(-k_l(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i+1}| - r_l) - k_d(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_{i+1}) \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i+1}}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i+1}|}\right)\right)\left(\frac{x_i - x_{i+1}}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i+1}|}, \frac{y_i - y_{i+1}}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i+1}|}\right)[N]$$

弾性力　ダンパカ

(2)面から受ける圧力
i番目の面から受ける圧力とi-1番目の面から受ける圧力の合力

$$\boldsymbol{F}^{P}_{i} = \frac{1}{V}P(A_{i-1}\boldsymbol{n}_{i-1} + A_i\boldsymbol{n}_i)[N]$$

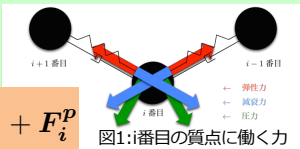


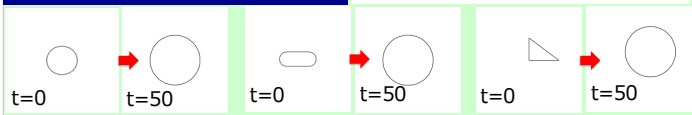
図1:i番目の質点に働く力

モデル式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}^{s}_{ii+1} + \boldsymbol{F}^{s}_{ii-1} + \boldsymbol{F}^{p}_{i}$$

k_s : バネ定数 (**自然長に反比例**)
$\boldsymbol{r}_i$: i番目の質点の座標
r_l : バネの自然長
m : **テップごとに一定量増加**)
A_i : 質点の質量
k_d : ダンパの減衰定数
$\boldsymbol{v}_i$: i番目の質点の速度
P : 圧力の大きさ (**1ス**
$\boldsymbol{n}_i$: i番目の面要素の外向き単位法線ベクトル

2Dシミュレーション結果　初期形状によらず真円になる



2次元では膨らみ方の違い再現不可

3.擬似3次元モデル

擬似3次元モデル＝　2次元断面を計算するモデル

【擬似3次元モデルの利点】
単純なモデルかつ少ない計算で**3次元数値計算に近い結果が出る**

楕円球型と円柱型の風船に着目する． 楕円球と円柱はいずれも**回転体**であるので，本項では風船を**z軸を回転軸にもつ回転体**とする．この時x-y断面の半径Rにより，回転体表面は $R = R(z)$ で表される
あるx-y断面における質点に働く力は**全て同じ大きさで向きが動径方向**
→合力がz軸に対称(R方向一様)であり，擬似3次元モデル適用可

よって回転体の風船の挙動はR-z平面上の曲線R=R(z)の挙動に相当する．
各質点に対し，z座標z_kとx-y断面半径R_kを用いて極座標による3次元モデル式が得られる
→0番目の質点,バネだけ取り出す．(どの質点を取り出しても同じ)

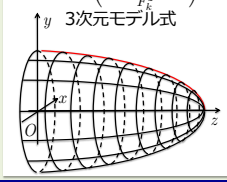
$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}_{k,n}}{dt^2} = \begin{pmatrix} F^R_k \cos\frac{2n\pi}{N} \\ F^R_k \sin\frac{2n\pi}{N} \\ F^z_k \end{pmatrix}$$

3次元モデル式

R方向一様と仮定

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}_k}{dt^2} = \begin{pmatrix} F^R_k \\ F^z_k \end{pmatrix}$$

擬似3次元モデル式



赤線だけ取り出す

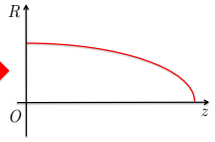


図2: 擬似3次元モデル

擬似３次元モデルにおける圧力

圧力は**台形面の重心から外向き法線ベクトル方向**に働き，台形面の4頂点の質点に分配される
【圧力の分配方法】
1.重心に働く力と4質点に分配された力の**釣り合いの式**
2.4質点の力について，面の重心を通る**軸周りのモーメントの釣り合いの式**

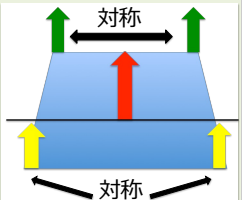


図3:圧力のモーメント

質点は隣接する4つの台形面から圧力を受けるので，
この計算を4つの台形面について行い，圧力の合力を求める．

4.数値計算

目的　**初期形状を円柱から段階的に変化させ，膨らみ指標がどう変化するかを調べる**

膨らみ指標＝最も太い部分の歪み/根元部分の歪み

膨らみ指標としてz方向のバネとR方向のバネに対し，それぞれN1+N3番目とN1/2番目のバネの**歪みの比**をとり，**εz, εR**とする．

方法

1. 根元部分の**質点数N1を75で固定**し，**質点数N2を75から295**まで10刻みで増加させることで，**初期形状を円柱型から楕円球型に段階的に変化させる．**
2. 各N2におけるεz, εRを10回計算し，その平均をグラフ化

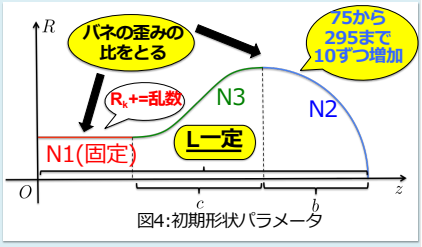
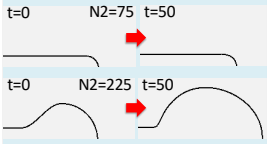


図4:初期形状パラメータ

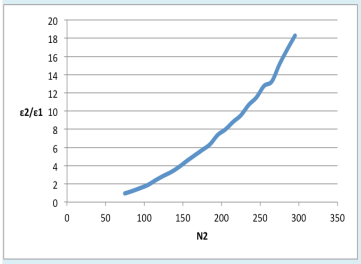
結果　楕円球型→ 太い部分から膨らむ
円柱型→根元から膨らむ

【z-R平面】



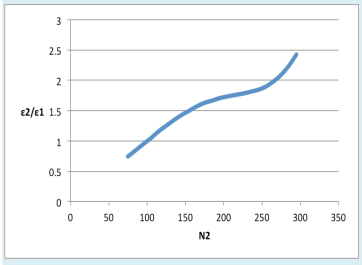
楕円球型は実際の風船の膨らむ挙動に対応
→断面半径の太い部分が膨らみ，根元の部分がほとんど膨らまなかった．
- **円柱型は実際の風船の挙動と合わない結果**
→根元の部分から膨らむ独特な現象を再現できなかった．

【z方向のバネの歪みの比εz】



歪みの比εzが連続的に単調増加
- N2=N2=225でεz>1
→楕円球は根元の部分より太い部分が膨らむ
→z-R平面上の結果を裏付けている．
- グラフが常に下に凸
- R方向のバネの歪みに比べて乱数の影響をより受けている

【R方向のバネの歪みの比εR】



歪みの比εRが連続的に単調増加
- N2=75でεR<1, N2=225,でεR>1
→円柱型では根元の部分が太い部分より膨らみ，**楕円球では太い部分がより膨らむ**
→実際の現象に対応．
- **変曲点**が存在する．
→分岐の可能性あり

5.結論・今後の課題

- **擬似3次元モデルを導出した**
- **楕円球型は太い部分から，円柱型は根元から膨らむ**

【今後の課題】
- **N1の値を変更し，N1が与える影響を調べる**
- **N1, N2をより細かく変える**
- **新たな指標を試す**

分岐が得られる可能性がある．

参考文献　[1] Matyja, Maciej. "How to implement a pressure soft body model." (2004).