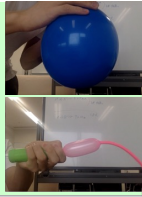


# 形状の違いによる風船の膨らみ方の違い

明治大学 総合数理学部 現象数理学科 池田幸太研究室所属

## 1. 研究の動機・目標

風船の膨らむ挙動は様々なモデルで研究されており、先行研究では単純な**バネダンパモデル**(Matyka, 2004)がある。風船には楕円球型や円柱型があり、それぞれ膨らみ方が異なるが、**膨らみ方の違いによる研究が存在しない**



【動機】 風船の膨らみ方の違いを再現したい

【目標】 擬似3次元モデルを導出する  
楕円球型と円柱型風船の膨らみ方の違いを評価する

## 2. 数理モデル

Matyka氏(2004)[1]のモデルを用いてバネダンパ系において*i*番目の質点に働く力を計算する。

質点*i*が受ける力は(1)バネからの弾性力とダンパ力と(2)面からの圧力

(1)弾性力とダンパ力は以下の2つ

(i) *i*番目のバネから受ける弾性力とダンパ力

$$F_{ii+1}^s = \left( -k_i(|r_i - r_{i+1}| - r_l) - k_d(v_i - v_{i+1}) \cdot \frac{(r_i - r_{i+1})}{|r_i - r_{i+1}|} \right) \begin{pmatrix} \frac{x_i - x_{i+1}}{|r_i - r_{i+1}|} \\ \frac{y_i - y_{i+1}}{|r_i - r_{i+1}|} \end{pmatrix} [N]$$

(2)面から受ける圧力

*i*番目の面から受ける圧力と*i-1*番目の面から受ける圧力の合力

$$F_i^P = \frac{1}{V} P (A_{i-1} n_{i-1} + A_i n_i) [N]$$

### モデル式

$$m \frac{d^2 r_i}{dt^2} = F_i = F_{ii+1}^s + F_{ii-1}^s + F_i^P$$

- $k_s$ : バネ定数 (自然長に反比例)
- $k_d$ : ダンパの減衰定数
- $r_i$ : *i*番目の質点の座標
- $v_i$ : *i*番目の質点の速度
- $n_i$ : バネの自然長
- $P$ : 圧力の大きさ (1ス)
- $m$ : テップごとに一定量増加
- $n_i$ : *i*番目の面要素の外向き単位法線ベクトル
- $A_i$ : 質点の質量

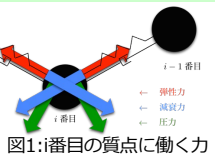
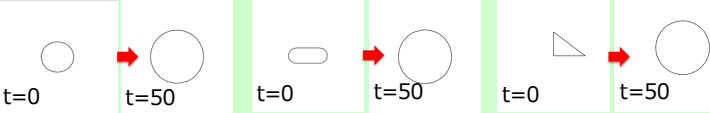


図1: *i*番目の質点に働く力

## 2Dシミュレーション結果 初期形状によらず真円になる



2次元では膨らみ方の違い再現不可

## 3. 擬似3次元モデル

擬似3次元モデル = 2次元断面を計算するモデル

【擬似3次元モデルの利点】

単純なモデルかつ少ない計算で3次元数値計算に近い結果が出る

楕円球型と円柱型の風船に着目する。楕円球と円柱はいずれも回転体であるので、本項では風船をz軸を回転軸にもつ回転体とする。この時x-y断面の半径Rにより、回転体表面は  $R = R(z)$  で表される

あるx-y断面における質点に働く力は**全て同じ大きさで向きが動径方向**  
→合力がz軸に対称(R方向一様)であり、**擬似3次元モデル適用可**

よって回転体の風船の挙動はR-z平面上的曲線R=R(z)の挙動に相当する。

各質点に対し、z座標z<sub>k</sub>とx-y断面半径R<sub>k</sub>を用いて極座標による3次元モデル式が得られる

→0番目の質点、バネだけ取り出す。(どの質点を取り出しても同じ)

$$m \frac{d^2 r_{k,n}}{dt^2} = \begin{pmatrix} F_k^R \cos \frac{2n\pi}{N} \\ F_k^R \sin \frac{2n\pi}{N} \\ F_k^z \end{pmatrix} \rightarrow \text{R方向一様と仮定} \rightarrow m \frac{d^2 r_k}{dt^2} = \begin{pmatrix} F_k^R \\ F_k^z \end{pmatrix}$$



図2: 擬似3次元モデル

### 擬似3次元モデルにおける圧力

圧力は台形面の重心から外向き法線ベクトル方向に働き、台形面の4頂点の質点に分配される

【圧力の分配方法】

1. 重心に働く力と4質点に分配された力の釣り合いの式
2. 4質点の力について、面の重心を通る軸周りのモーメントの釣り合いの式

質点は隣接する4つの台形面から圧力を受けるので、この計算を4つの台形面について行い、圧力の合力を求める。

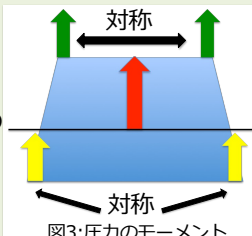


図3: 圧力のモーメント

## 4. 数値計算

目的 初期形状を円柱から段階的に変化させ、膨らみ指標がどう変化するかを調べる

膨らみ指標 = 最も太い部分の歪み / 根元部分の歪み

膨らみ指標としてz方向のバネとR方向のバネに対し、それぞれN1+N3番目とN1/2番目のバネの歪みの比をとり、 $\epsilon z$ ,  $\epsilon R$ とする。

### 方法

1. 根元部分の質点数N1を75で固定し、質点数N2を75から295まで10刻みで増加させることで、初期形状を円柱型から楕円球型に段階的に変化させる。
2. 各N2における $\epsilon z$ ,  $\epsilon R$ を10回計算し、その平均をグラフ化

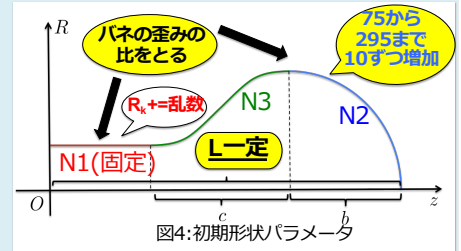


図4: 初期形状パラメータ

### 結果

楕円球型 → 太い部分から膨らむ  
円柱型 → 根元から膨らむ

### 【z-R平面】

t=0 N2=75 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

t=0 N2=225 t=50

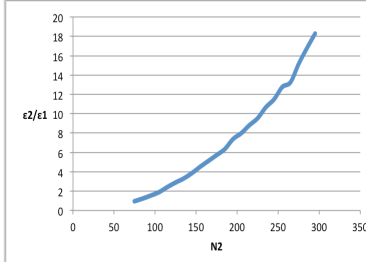
t=0 N2=225 t=50

楕円球型は実際の風船の膨らむ挙動に対応

→断面半径の太い部分が膨らみ、根元の部分がほとんど膨らまなかった。

・円柱型は実際の風船の挙動と合わない結果  
→根元の部分から膨らむ独特な現象を再現できなかった。

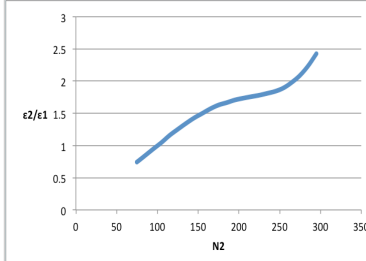
### 【z方向のバネの歪みの比 $\epsilon z$ 】



歪みの比 $\epsilon z$ が連続的に単調増加

- ・  $N2 = N2 = 225$  で  $\epsilon z > 1$   
→楕円球は根元の部分より太い部分が膨らむ  
→z-R平面上の結果を裏付けている。
- ・ グラフが常に下に凸
- ・ R方向のバネの歪みに比べて乱数の影響をより受けている

### 【R方向のバネの歪みの比 $\epsilon R$ 】



歪みの比 $\epsilon R$ が連続的に単調増加

- ・  $N2 = 75$  で  $\epsilon R < 1$ ,  $N2 = 225$  で  $\epsilon R > 1$   
→円柱型では根元の部分が太い部分より膨らみ、楕円球では太い部分がより膨らむ  
→実際の現象に対応。
- ・ 変曲点が存在する。  
→分岐の可能性あり

## 5. 結論・今後の課題

- ・ 擬似3次元モデルを導出した
- ・ 楕円球型は太い部分から、円柱型は根元から膨らむ

### 【今後の課題】

- ・ N1の値を変更し、N1が与える影響を調べる
- ・ N1, N2をより細かく変える } 分岐が得られる可能性がある。
- ・ 新たな指標を試す

### 参考文献

[1] Matyja, Maciej. "How to implement a pressure soft body model." (2004).