OVモデルとマクロ交通流モデルのシミュレーション

総合数理学部 現象数理学科 池田研究室 4年

1. 序論　　交通流

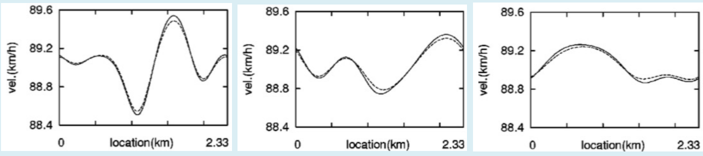
明確な理由なしに発生する自然渋滞の数理モデルには2種類ある。

◯マクロ（車の集団：連続）→ 系の中の車全体の流れに着目

◯ミクロ（車の集団：離散）→ 個々の車の相互作用に着目

先行研究では、ミクロモデルであるOptimal Velocity(OV)モデル から、マクロモデルを導出し、同じ条件下で同じ挙動を得ることができると示している。

(H.K.Lee et al. PRE(2001))



問題点　数値計算スキームが不明。微妙なズレはスキームのせいでは？より良いスキームで数値計算したい。

目的　スペクトル法、差分法でマクロ交通流モデルの数値計算をしてOVモデルと比較を行う。

2. 数理モデル　　ミクロからマクロへ

◯OVモデル・・・車間距離を参照して、最適速度に近づくように個々の車の加速度が決められるモデル

(M.Bando et al. JJIAM(1994))

$$\frac{d^2y_n}{dt^2} = \lambda\left[V_{op}(\Delta y_n(t)) - \frac{dy_n}{dt}\right]$$

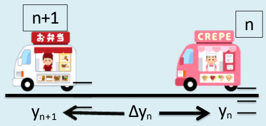
λ：感応度（反応の速さ）

y_n：n番目の車の位置

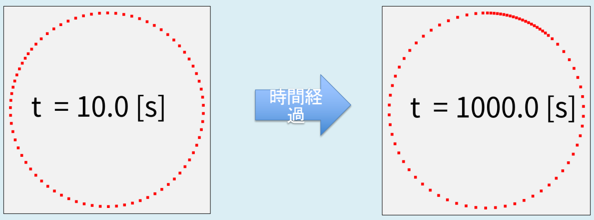
$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$：前方の車との車間距離

アクセル＝最適速度－自分の速度

OVモデルは、車間距離が詰まることで渋滞が形成されていくという、一様流の不安定性を表すことができる。時間遅れの効果を感応度で表している。



前方の車に追従



λ = 2.0　最適速度関数は下記を使用

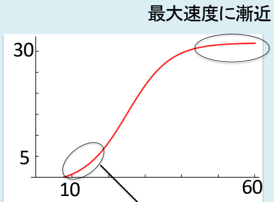
最適速度関数 $V_{op}(\Delta y)$

1. Δyについて単調増加
2. Δyが大きくなると一定値に近づく

今回は次の関数を用いる（右図）

$$V_{op}(\Delta y) = 16.8\left[\tanh\left(2\frac{\Delta y - 25.0}{23.3}\right) + 0.913\right]$$

最大速度に漸近



車間距離が小さい間は緩やかに増加

(1)式の車間距離を密度の逆数で近似

$$\langle \Delta y_n \rangle \approx \rho^{-1}(x + 1/2\rho(x,t), t)$$

そのほか式変形を重ねて次の式へ

車間距離が詰まる＝車の密度が大きくなる

◯マクロ交通流モデル・・・密度 $\rho(x,t)$ と速度 $v(x,t)$ の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \lambda[V_{op}(\rho^{-1}) - v] - \frac{\lambda V'_{op}(\rho^{-1})}{2\rho^3}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\lambda}{6\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

3. スペクトル法

差分法との違い ・・・ フーリエ級数で離散化

①偏微分方程式の解をフーリエ級数で離散化（周期境界条件の場合）

$$\rho(x,t) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{\rho}_k(t) e^{ik\frac{2\pi}{L}x}, \quad v(x,t) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{v}_k(t) e^{ik\frac{2\pi}{L}x}$$

展開係数（t の関数）　x の関数

②偏微分方程式を展開係数 $\hat{\rho}_k(t)$と $\hat{v}_k(t)$の常微分方程式に帰着

PDEの線形項：$\frac{\partial \rho}{\partial t}$　$\frac{\partial v}{\partial t}$　v → ODEの項：$\frac{d\hat{\rho}_k}{dt}$　$\frac{d\hat{v}_k}{dt}$　$\hat{v}_k$

非線形項：$v\frac{\partial v}{\partial x}$ $\xrightarrow{\text{離散逆フーリエ変換}}$ $V_j = v_j\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_j$ $\xrightarrow{\text{離散フーリエ変換}}$ ODEの項：$\hat{V}_k$

$$v_j = \sum_{k=-N}^{N} \hat{v}_k e^{\frac{2\pi ik}{L}x_j}$$

$$\hat{V}_k = \frac{1}{J}\sum_{j=0}^{J-1} V_j e^{-\frac{2\pi ik}{L}x_j}$$

高速（逆）フーリエ変換を用いると計算コストが少なくなる。

スペクトル法を使うことのメリット

◯差分近似に伴う数値的分散性がない。

◯偏微分方程式の保存量が離散化後も保たれる。

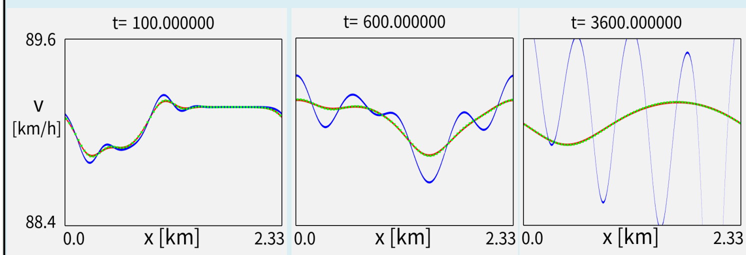
◯収束が早い。

石岡(2004), 東京大学出版会

4. 数値計算　OVモデルとマクロ交通流の比較

シミュレーション① 72台 2.33km 渋滞が発生しないパラメータ

差分法 dt=1.0×10^{-4} dx=1.0×10^{-2}　スペクトル法 N=50 dt=1.0×10^{-4}

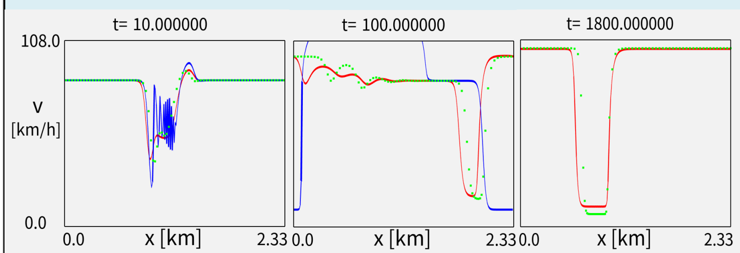


緑の点はOVモデル、赤線はスペクトル法で解いたマクロモデル、青線は差分法で解いたマクロモデルの速度を表している

結果①　スペクトル法とOVモデルの挙動が長時間一致した。一方、差分法ではOVモデルの挙動を再現できず。

シミュレーション② 77台　2.33km 渋滞が発生するパラメータ

差分法 dt=1.0×10^{-4} dx=1.0×10^{-2}　スペクトル法 N=50 dt=1.0×10^{-4}



結果②　少しズレがあるが渋滞発生までの挙動が一致した。渋滞波の伝播速度には差があった。

5.結論

◎スペクトル法と差分法を用いてマクロ交通流モデルの数値計算を行なった。スペクトル法とOVモデルの挙動は一致したが、差分法はOVモデルの挙動を再現できなかった。

◎渋滞が発生するように車の台数を変更してマクロモデルとOVモデルを比較した。渋滞が形成される場合でも、両モデルは定性的に一致した。マクロモデルの方が渋滞波の伝播速度が速いことがわかった。