力を加えた弾性体の歪みのシミュレーション

明治大学　総合数理学部　現象数理学科４年　池田研究室所属

研究背景

うどんを噛むときの弾力をシミュレーションしたい。そのために、弾性体に外部から力を入れた際の物体が変形する様子を調べうどんに応用させていきたい。

目標

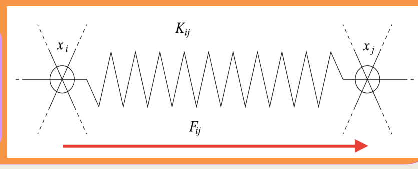
弾性体に力を加え、形状が変化する様子をシミュレーションにて再現する。

先行研究の数理モデル

$$F_i = -\sum_{j\in N_i} K_{ij}\left(\frac{\boldsymbol{x_i}-\boldsymbol{x_j}}{|\boldsymbol{x_i}-\boldsymbol{x_j}|}\right)(|\boldsymbol{x_i}-\boldsymbol{x_j}|-\lambda_{ij})$$

★数理モデルについて
F_i は節点に作用する力である（フックの法則）。
このモデルを元にして、今回の研究を進めていく。

F_i: 節点iに作用する力、K_{ij}: バネ定数、λ: 自然長、x_i, x_j: 節点の位置



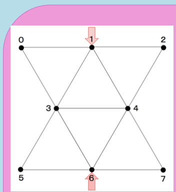
数理モデルの書き換え

物体の外部から上下に力を加えるシチュエーションを考える

書き換えの流れ⇒
1.先行研究の数理モデルを元に、先ずは節点同士の力の釣り合いの式を立てる
2. 線形化して行列が出来るようにする
3.上記２つをこなしただけでは想定したい状況と異なる現象になるため境界条件を付ける

1 .力の釣り合いの方程式を立てる

※赤矢印が『物体に加わる力』を表す



例：3×3の二次元三角網

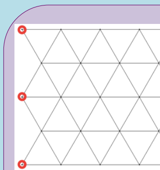
節点１に関する力の釣り合いの式は以下になる。
力が加わるため、左辺は力 F_1 になる。

$$F_1 = -\sum_{j\in 0,2,3,4} K_{1j}\left(\frac{\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_j}}{|\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_j}|}\right)(|\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_j}|-\lambda_{1j})$$

節点３に関する力の釣り合いの式は以下になる。
力が加わるため、左辺は力０になる。

$$0 = -\sum_{j\in 0,1,4,5,6} K_{3j}\left(\frac{\boldsymbol{x_3}-\boldsymbol{x_j}}{|\boldsymbol{x_3}-\boldsymbol{x_j}|}\right)(|\boldsymbol{x_3}-\boldsymbol{x_j}|-\lambda_{3j})$$

3 .境界条件



5×5の二次元三角網

なぜ必要か→物体が動かない状況を想定したい

今のままでは出来上がった行列は正則ではないためLU分解を用いた計算が出来ない。また、本研究では『止まった状態の物体に外部から力を加えたときのひずみ』を考えたいが、今の状態では『物体が歪みつつ、更に物体そのものが移動をしてしまう』という想定していない動きが含まれてしまう。以上２点の問題点を解決するために境界条件を付ける。

境界条件の与え方
→丸の付いた節点が動かないよう固定する

左図は本質が分かるよう5×5で表す。左右に飛び出した赤丸の節点を、物体に力を加える前後で位置が変わらないように固定する。変化後の座標の位置は未知数を定めることで得られるため、未知数が０であれば変化しないことになる。よって、未知数が０になるように行列を書き換えれば良い。

2 .線形化する

※ここが重要

ポイント１.力は小さく少しずつ加えるとする

$\boldsymbol{F}$ に微小の定数 ε をかけ、力を小さくする

・物体にかかる力は非常に微小と考える
・このとき、$\varepsilon F^n = n\varepsilon F$ が成り立つ※1
・加わる力は微小なので、n+1回目の力が入っても式は成り立つ

※1　右肩に乗っている値は、何回力を入れたかを表している。

ポイント２.移動後の座標の位置を直前の座標で表現

$$\boldsymbol{x_i^{n+1}} = \boldsymbol{x_i^n} + \varepsilon \boldsymbol{a_i^{n+1}} \qquad \boldsymbol{y_i^{n+1}} = \boldsymbol{y_i^n} + \varepsilon \boldsymbol{b_i^{n+1}}$$

・$\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{b_i}$ は未知数

↑座標の表現方法

ポイント３.代入してテーラー展開をする

・新しい表現になった座標を、１.で得られた式に代入※2
・代入した式でn回目とn+1回目の差を求める※3

$$0 = \sum_{j\in 0,1,4,5,6} K_{3j}\left\{a_j^{n+1} - a_3^{n+1} + \left(\frac{a_j^{n+1}-a_3^{n+1}}{\sqrt{(x_j^n-x_3^n)^2+(y_j^n-y_3^n)^2}} + \frac{(x_j^n-x_3^n)\left\{(a_j^{n+1}-a_3^{n+1})(x_j^n-x_3^n)-(b_j^{n+1}-b_3^{n+1})(y_j^n-y_3^n)\right\}}{\sqrt{(x_j^n-x_3^n)^2+(y_j^n-y_3^n)^2}^{3/2}}\right)\lambda_{3j}\right\}\varepsilon$$

節点３に関するテーラー展開後の式。x座標に関する分だけ書き表したものである

※2　n回目の場合は右肩にnを付け加えるだけで良い。n+1回目の場合は右辺を該当箇所に代入
※3　$\varepsilon \boldsymbol{F_i^{n+1}} = \varepsilon \boldsymbol{F_i^n} + \varepsilon \boldsymbol{F_i^1}$ の関係があり、差は $\varepsilon \boldsymbol{F_i^1}$ と微小であるのでテーラー展開ができる

シミュレーション

準備

パラメータの設定：K_{ij} は1、λ は初期の節点間の間の長さとする。

その１.節点が繋がってるか否かを判定する行列を作る

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&1&1&0\\ 0&1&1&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1&0 \end{pmatrix}$$

3×3のつながりを表す行列

繋がってたら１、繋がってないなら０

力の釣り合いの行列とは別に新たに**判定用の行列**を作る。一つの節点に対してそれ自身を含む全ての節点が判定の対象となるため、行と列はそれぞれ節点の個数分となる。このとき、**繋がっていれば１**を、**繋がっていなければ０**となるようにする。また、自身の節点との繋がりは０になるようにする。例えば３×３の二次元三角網の場合、左のような表し方になる。行列の一行目は、節点０がどの節点と繋がっているかを判定している。左から順に節点番号が進んでいる。

その２.線形化した行列をLU分解で解く

未知数 $\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{b_i}$ を求める

・$\boldsymbol{A x_u} = \boldsymbol{F}$ の形で考える
・$\boldsymbol{A}$ は線形化した行列、$\boldsymbol{x_u}$ は未知数の縦ベクトル、$\boldsymbol{F}$ は加えられる力の縦ベクトル

$$-K_{30} + \frac{K_{30}(x_0-x_3)\lambda_{30}}{\sqrt{(x_0^n-x_3^n)^2+(y_0^n-y_3^n)^2}^{3/2}} + \frac{K_{30}\lambda_{30}}{\sqrt{(x_0^n-x_3^n)^2+(y_0^n-y_3^n)^2}}$$

節点３と０：x座標の未知数 a_i に関する式

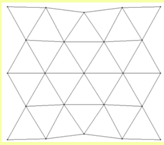
$$\frac{K_{30}(x_0-x_3)(y_0-y_3)\lambda_{30}}{\sqrt{(x_0^n-x_3^n)^2+(y_0^n-y_3^n)^2}^{3/2}}$$

節点３と０x座標の未知数 b_i に関する式

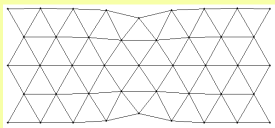
つながり行列の１の部分に上記の式が入る。また、対象となる節点自身の力の釣り合いは１が現れる度にその節点に力を足すというやり方で再現する。

結果　歪みを再現できた

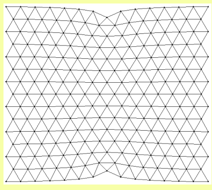
条件：加える力は一定、バネ定数は１、縦と横の個数のみ変更



①５×５の二次元三角網



②３×９の二次元三角網



③１５×１５の二次元三角網

・図③は力を加えている部分を局所的に見ると最も歪んでいる
・図②は物体の内部まで力が及んでいるように見える
・物体が縦横両方とも大きくなればなるほど、物体全体で見たときの歪みの割合は小さくなっていくことが分かる

また、節点全体の個数は①より②の方が多いが力を加えられた節点の移動距離は①の方が長いため、歪みは節点の個数だけに左右されるものではないことが分かる。

結論

シミュレーションにて弾性体の歪みを再現することが出来た。

（縦と横の節点の個数を変化させることで、物体の大きさ・形状ごとの複数の異なる結果を見比べることが出来た。）

考察

節点の個数を縦と横で変更することによって弾性体の歪み方を変えることが出来た。柔いものを作りたければ節点個数を少なくし、固くしたければ多くするという大まかなやり方が取れる。そこにうどんの差を表す水分量や塩分量などのパラメータをバネの新しい情報として付与することで、よりうどんごとの柔らかさの違いをシミュレーションにて再現できる可能性が高い。

参考文献
H.J. Vogel, H.Hoffmann, A.Leopold, K.Roth(2003)
"Studies of crack dynamics in clay soil Ⅱ. A physically based model for crack formation"